ПРАВИЛА ВЫПОЛНЕНИЯ И ОФОРМЛЕНИЯ ИНДИВИДУАЛЬНОЙ РАБОТЫ

При выполнении индивидуальной работы надо строго соблюдать перечисленные ниже правила. Работы, выполненные небрежно и с нарушением этих правил, не зачитываются и возвращаются для переработки.

1. Индивидуальная работа состоит из 7 заданий. Необходимо выполнить по одной задаче из каждого задания, согласно своему варианту. Номер варианта соответствует номеру по списку в студенческом журнале.

Например,

Номер варианта	№1	№2	№3	№4	…
1	1.1	2.1	3.1	4.1	…
2	1.2	2.2	3.2	4.2	…

Работа, в которых решены не все задачи или содержатся задачи, выбранные не из своего варианта, не зачитываются

2. Индивидуальная работа должна быть выполнена в общей тетради в клетку чернилами любого цвета, кроме красной. Необходимо оставлять поля для пометок преподавателя.

3. На обложке тетради надо указать наименование предмета, Ф.И.О., название учебного заведения. На первом листе должен быть указан вариант.

4. Задачи надо располагать в порядке возрастания их номеров, сохраняя при этом порядковый номер задачи.

5. Условие каждой задачи необходимо записывать полностью.

6. Решения задач надо излагать подробно и аккуратно, объясняя все действия. Решение задач без пояснений не будет зачтено.

7. При выполнении индивидуальной работы рекомендуется оставлять в конце тетради несколько чистых листов для всех исправлений и дополнений в соответствии с указаниями преподавателя.

ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

1 Составить математическую модель заданной экономической задачи и найти требуемый оптимальный результат с помощью графического метода.

1.1 Фирма производит две модели А и В сборных книжных полок. Их производство ограничено наличием сырья (высококачественных досок) и временем работы оборудования. Для каждого изделия модели А требуется 3м^2 досок, а для изделия В – 4м^2. Фирма может получить от своих поставщиков до 1700м^2 досок в неделю. На каждое изделие модели А требуется 12 мин машинного времени, а на изделие В – 30 мин. В неделю можно использовать 160 ч машинного времени. Если каждое изделие модели А приносит 2 руб. прибыли, а изделие В – 4 руб. Прибыли. Сколько изделий каждой модели фирме необходимо выпускать в неделю, чтобы прибыль от продажи была максимальной?

1.2 Мебельная фабрика выпускает столы, стулья. При их изготовлении используются 2 вида досок, причем фабрика имеет в наличии 1500 м досок 1 типа и 1000 м досок 2 типа. Количество трудовых ресурсов, занятых производством этой продукции, составляет 800 чел-ч. В таблице приведены нормативы затрат каждого из видов ресурсов на изготовление 1 ед. изделия и прибыль на 1 ед. изделия:

Ресурсы	Затраты на 1 ед. изделия	
	стол	стул
Доски 1 типа, м	5	1
Доски 2 типа, М	2	3
Труд, чел-ч	3	2
Прибыль, руб./шт.	120	50

Определите оптимальный ассортимент, максимизирующий прибыль.

1.3 Фабрика “GRM plc” выпускает два вида каш для завтрака – “Crunchy” и “Chewy”. Используемые для производства обоих продуктов ингридиенты в основном одинаковы и, как правило, не являются дефицитными. Основным ограничением, накладываемым на объем выпуска, является наличие фонда рабочего времени в каждом из трех цехов фабрики.

Управляющему производством Джою Дисону необходимо разработать план производства на месяц. В следующей таблице указаны общий фонд рабочего времени и число человеко-часов, требуемое для производства 1 т продукта:

Цех	Необходимый фонд рабочего времени, чел-ч		Общий фонд рабочего времени, чел-ч в месяц
	“Crunchy”	“Chewy”	
Производство	10	4	1000
Добавка приправ	3	2	360
Упаковка	2	5	600

Доход от производства 1 т “Crunchy” составляет 150 руб., а от производства “Chewy” – 75 руб. В настоящее время нет никаких ограничений на возможные объемы продаж.

Определите объем выпуска продукции, максимизирующий общий доход фабрики за месяц.

1.4 Компания производит бумажники, кошельки. Конструкция этих двух видов изделий предусматривает использование кожи и синтетических материалов, причем кожа является дефицитным материалом. В производственном процессе используются два вида ручных работ: прошивка и зачистка. В следующей таблице приведены данные, характеризующие производственный процесс, потребность в ресурсах и доход на единицу производимого изделия.

Ресурс	Ресурсы, необходимые для изготовления одного изделия		Ежедневный лимит ресурса
	Бумажник	Кошелек	
Кожа (кв. футы)	2	1	42
Прошивка (ч)	2	1	40
Зачистка (ч)	1	0,5	45
Отпускная цена	24	22	

Определите объем выпуска изделий, максимизирующий общий доход компании за месяц.

1.5 Компания производит две модели электронных устройств, при изготовлении которых используются резисторы, конденсаторы и микросхемы. В следующей таблице приведены данные, характеризующие производство этих моделей.

Ресурс	Количество комплектующих на одно изделие		Лимит комплектующих (шт.)
	Модель 1	Модель 2	
Резистор	2	3	1200
Конденсатор	2	1	1000
Микросхема	0	4	800
Доход на одно изделие (руб)	3	4	

Определите оптимальный план выпуска по критерию максимум прибыли.

1.6 Компания производит два вида продукции: P_1, P_2. В производственном процессе используются материалы M_1 и M_2, обрабатываемые на станках C_1 и C_2. В следующей таблице приведены данные, характеризующие производственный процесс изготовляемой продукции.

Ресурсы	Единица измерения	Количество ресурсов на единицу продукции		Ежедневный фонд ресурсов
		P_1	P_2	
Время работы станка C_1	Минуты	1	2	430
Время работы станка C_2	Минуты	3	0	460
Материал M_1	Фунты	1	4	420
Материал M_2	Фунты	1	1	300

Ежедневный объем производства изделия P_1 должен быть не менее 70 единиц, а изделия P_2 – не более 240 единиц. Доход на единицу изделий P_1, P_2 составляет соответственно 300 и 200 руб. Требуется составить недельный план выпуска продукции с целью максимизации стоимости изготовленной продукции.

1.7 Китайская компания по производству гусеничных механизмов выпускает 2 сходных друг с другом товаров А, В. Нормы расхода ресурсов на них – в таблице.

Ресурсы	Товары		Недельный запас ресурс
	А	В	
Сырье, кг	6	6,5	35000
Сборка, ч	1	0,75	6000
Обжиг, ч	3	4,5	30000
Упаковка, ч	0,5	0,5	4000
Цена, руб.	40	42	

Определить план производства с целью максимизации стоимости выпущенной продукции.

1.8 Для изготовления 2 видов продукции (А, Б) используется три вида сырья. Ресурсы сырья, нормы его расхода на единицу продукции и получаемая от реализации единицы продукции прибыли приведены в таблице.

Сырье	А	Б	Запасы
1	2	1	2400
2	1	5	1200
3	3	0	3000
Прибыль	7,5	3	

Найдите оптимальный план выпуска продукции по критерию «максимум прибыли».

1.9 Один из заводов легкой промышленности производит порошок для изготовления напитков двух видов. Один из них продается в качестве напитка здоровья, поскольку имеет низкое содержание сахара; другой

напиток поставляется в медицинские учреждения в качестве продукции для больных, поскольку он содержит витаминные добавки.

В приведенной ниже таблице для каждого напитка указаны исходные данные:

Напиток	Расход ингредиентов на 1 кг продукта, кг			Цена 1 кг напитка, руб.
	Сахар	Солодовый экстракт	Сухие сливки	
Здоровье	0,15	0,25	0,55	1,2
Для больных	0,15	0,3	0,25	1,5
Недельный запас ингридиентов, кг	1000	1250	2200	

Требуется составить план выпуска продукции с целью максимизации стоимости изготовленной продукции.

1.10 Прибыль от изделий А, В. составляет соответственно 3, 4. единиц. Для их изготовления расходуется время работы двух станков, которые можно эксплуатировать 12 и 15 часов в день соответственно. В таблице – нормы времени на изделие:

Станки	Изделия	
	А	В
1	3	2
2	4	1

Найдите оптимальный план по критерию «максимум прибыли.

1.11 “ Princetown Paints Ltd ” выпускает два основных типа румян: жидкие и перламутровые – с использованием одинаковых смесеобразующих машин и видов работ. Менеджер фирмы разрабатывает план производства на неделю. Информация о ценах продаж и стоимости 100 л товара приведены в таблице (руб.).

	Румяна	
	Жидкие	Перламутровые
Цена продажи на 100 л	120	126
Издержки производства товаров на 100 л:		
стоимость сырья	11	25
стоимость трудозатрат	30	36
стоимость приготовления смеси	32	20
другие издержки	12	15

Стоимость 1 чел.-ч составляет 3 руб., а стоимость 1 ч приготовления смеси – 4 руб. Фонд рабочего времени ограничен 8000 чел.-ч в неделю, а ограничение на фонд работы смесеобразующих машин равно 5900 ч в неделю. Определить объемы производства румян в неделю, при которых достигается максимальное значение получаемой за неделю прибыли.

1.12 Компания “ Bermuda Paint ” - частная промышленная фирма, специализирующаяся на производстве технических лаков. Представленная ниже таблица содержит информацию о ценах продажи и соответствующих издержках производства единицы полировочного и матового лаков.

Лак	Цена 1 галлона, грн.	Издержки производства 1 галлона, руб.
Матовый	13	9
Полировочный	16	10

Трудозатраты для производства 1 галлона матового лака составляют 6 мин, а полировочного – 12 мин. Фонд рабочего времени равен 400 чел.-ч в день. Размер ежедневного запаса необходимой химической смеси - 100 унций, тогда как ее расход на 1 галлон матового и полировочного лаков составляет 0,05 и 0,02 унции соответственно. Технологические возможности завода позволяют выпускать не более 3000 галлонов лака в день.

Администрации компании необходимо определить ежедневные объемы производства каждого вида лаков, которые позволяют получать максимальный общий доход.

1.13 Компания производит различные виды мебели для кабинетов (комплекты А, В). Объём работы, необходимой для каждой операции, приводится в таблице.

Операция	Объём работ, чел. ч./ комплект	
	А	В
Изготовление частей	2	3
Сборка	1	2
Полировка и проверка	1	1

Максимальный объёма работ в неделю составляет 360 чел.-ч. на изготовление частей мебели, 240 чел.-ч. на сборку и 180 чел.-ч. на полировку. Рынок сбыта расширяется, но он недолговечен, а возможность хранения ограничивают производство 170-ю комплектами в неделю. Прибыль от продажи комплектов составляет соответственно 15, 22 руб.

Найдите оптимальный план выпуска продукции по критерию «максимум прибыли».

1.14 Фирма специализируется на производстве буфетов. Она может производить два типа буфетов (А, В), что требует различных затрат труда на каждой стадии производства (см. табл.)

Производственный участок	Затраты труда, чел-ч	
	А	В
Лесопилка	1	2
Сборочный цех	2	4
Отделочный цех	1	1

В течение недели можно планировать работу на лесопилке на 360 чел-ч, в сборочном цехе – на 520 чел-ч, в отделочном цехе – на 220 чел-ч. Прибыль от продажи буфетов составляет соответственно 9, 11 руб. Найдите оптимальный план выпуска буфетов по критерию «максимум прибыли»

1.15 Фирма производит на фабрике два вида изделий. Производство лимитируется временем использования станков и количеством комплектующих изделий. Известно, что общее время использования станков – 90 ч в день, а комплектующих изделий может быть поставлено не более 80 в день.

Производственные характеристики	Изделие	
	I	II
Время использования станков, ч	1	3
Количество комплектующих изделий	2	2
Цена изделия, руб.	30	45

Найдите оптимальный план выпуска продукции, позволяющий получить максимальную прибыль.

1.16 Цех для производства двух видов продукции использует 4 группы оборудования.

Группа производственного оборудования	Нормы затрат производственного оборудования на одно изделие, станко-ч/изделие		Фонд времени работы оборудования, станко-ч
	продукция I	продукция II	
А	5	7	105
Б	9	9	81
В	2	0	10
Г	0	3	18
Прибыль (тыс. руб. на I ед. продукции)	2,5	2	

Определить план выпуска продукции, при котором будет достигнута максимальная прибыль.

1.17 На приобретение оборудования для нового производственного участка выделено 20 тыс. руб. Оборудование должно быть размещено на площади, не превышающей 72м^2. Предприятие может заказать оборудование 2-х видов: более мощные машины типа А стоимостью 5 тыс. руб., требующие производственную площадь 6м^2 и дающие 5 тыс. ед. продукции за смену, и менее мощные машины типа Б стоимостью 2 тыс. руб., занимающие площадь 12м^2 и дающие за смену 3 тыс. ед. продукции.

Найти оптимальный вариант приобретения оборудования, обеспечивающий максимум общей производительности нового участка.

1.18 При составлении суточного рациона кормления скота можно использовать сено (не более 50кг.) и силос (не более 85кг.). Рацион должен

обладать определенной питательностью (число кормовых ед. не менее 30) и содержать питательные вещества: белок(не менее 1кг.), кальций (не менее 100г.) и фосфор (не менее 80г.). В таблице 2 приведены данные о содержании указанных компонентов в одном кг. каждого продукта питания и себестоимости этих продуктов.

Продукт	Компоненты, г/кг				Себестоимость, руб./кг.
	Количество кормовых ед.	белок	кальций	Фосфор	
Сено	0,5	40	1,25	2	1,2
Силос	0,5	10	2,5	1	0,8

Определить оптимальный рацион исходя из условия минимума его себестоимости.

1.19 Для производства столов и шкафов мебельная фабрика использует необходимые ресурсы.

Ресурсы	Нормы затрат на одно изделие		Общее количество ресурсов
	стол	шкаф	
Древесина ($м^3$) I вида II вида Трудоемкость (чел-ч)	 0,2 0,1 1,2	 0,1 0,3 1,5	 40 60 371,4
Прибыль от реал. Ед. изд. (руб.)	6	8	

Определить, сколько столов и шкафов фабрике следует изготовлять, чтобы прибыль от их реализации была максимальной.

1.20 Трикотажная фабрика использует для производства свитеров и кофточек чистую шерсть, силон и нитрон, запасы которых составляют соответственно 900, 400 и 300 кг. Количество пряжи каждого вида (в кг), необходимой для изготовления 10-ти изделий, а также прибыль, получаемая от их реализации:

Вид сырья	Затраты пряжи на 10 шт. изделий (кг)	
	Свитера	кофточки
Шерсть	4	2
Силон	2	1
Нитрон	1	1

Прибыль от каждого десятка свитеров 6 руб., а от каждого десятка кофточек-5 руб. Установить план выпуска изделий, максимизирующий общую прибыль.

1.21 При подкормке посева нужно внести на 1 га почвы не менее 8 ед. химического вещества А, 21-вещества Б, 16-вещества В. Совхоз покупает комбинированные удобрения двух видов (1 и 2).

Химические вещества	Содержание вещества в одной весовой единице удобрений	
	I вид	II вид
А	1	5
Б	12	3
В	4	4
Цена одной весовой ед. удобрений (руб.)	5	2

Какое количество каждого вида удобрений необходимо закупить, чтобы общие затраты были минимальными?

1.22 Цех для производства 2-х видов продукции использует 4 группы оборудования.

Группа производственного оборудования	Нормы затрат произв. оборудования на одно изделие (станко-изделие)		Фонд времени работы оборудования (станко-ч)
	продукция I	продукция II	
А	2	2	24
Б	2	4	36
В	2	0	20
Г	0	2	16
Прибыль (руб.) на одну единицу продукции	4000	5000	

Определить план выпуска продукции, при котором будет достигнута максимальная прибыль.

1.23 Содержание витаминов А и С в одном кг фруктов задана в таблице:

Фрукты	Витамины	
	А, мг/кг	С, мг/кг
Вишни	3	150
Абрикосы	24	75

Сколько вишен и абрикосов следует включить в дневной рацион, чтобы в нем оказалось не менее 6 мг витамина А и не менее 75 мг витамина С и чтобы затраты были минимальные? Известно, что 1 кг вишни стоит 150 руб., а 1 кг абрикос- 200 руб.

1.24 Из пункта А в пункт В ежедневно отправляются пассажирские и скорые поезда. В таблице указан наличный парк вагонов разных типов, из которых ежедневно можно комплектовать данные поезда, и количество пассажиров, вмещающихся в каждом из вагонов.

Поезда	Вагоны				
	багажный	почтовый	плацкартный	купейный	мягкий
Состав вагонов в скором поезде	1	1	5	6	3
Состав вагонов в пассажирском поезде	1	-	8	4	1
Число пассажиров в вагоне	-	-	58	40	32
Имеющийся парк вагонов	12	8	81	70	26

Определить, сколько следует сформировать пассажирских и скорых поездов, чтобы обеспечить перевозку максимального количества пассажиров.

1.25 Известно, что откорм животных экономически выгоден при условии, когда животное получает в дневном рационе не менее 6 ед. питательного вещества А, не менее 12 ед. вещества В, не менее 4 ед. вещества С. Для откорма животных используются 2 вида кормов. Концентрация необходимых веществ в кормах и цена кормов в условных единицах приведены в таблице :

Питательные вещества	Концентрация питательных веществ в кормах	
	I вид	II вид
А	2	1
В	2	4
С	0	4
Цена кормов	5	6

Какое количества каждого вида корма необходимо расходовать, чтобы общие затраты на откорм были минимальными?

1.26 Для изготовления двух видов изделий А и В фабрика расходует в качестве сырья сталь и цветные металлы, имеющиеся в ограниченном количестве. На изготовлении этих изделий заняты токарные и фрезерные станки. В таблице приведены исходные данные задачи. Определить план выпуска продукции, при котором будет достигнута максимальная прибыль.

Вид ресурсов	Объем ресурсов	Нормы расхода на I изделие	
		изделие А	Изделие В
Сталь, кг	25	5	5
Цветные металлы, кг	12	3	0
Токарные станки, станко-ч	16	8	0
Фрезерные станки, станко-ч	32	0	8
Прибыль, руб.	-	3	2

1.27 Пищевкусовая фабрика может выпускать фруктовый сок с разливом в стеклянную и полиэтиленовую тару. Линия по выпуску сока в стеклянной таре может выпустить не более 10 т сока, в полиэтиленовой таре- не более 5 т. Найти программу выпуска сока в различной таре, которая обеспечивала бы фабрике максимальную прибыль, если известно, что себестоимость производства 1 т сока в стеклянной упаковке равна 1600 руб., в полиэтиленовой- 1600 руб., и если отпускная цена не зависит от тары и равна 4000 грн. за 1 т.

1.28 На звероферме могут выращиваться черно-бурые лисицы и песцы. Для обеспечения нормальных условий для их выращивания используется 3 вида кормов.

Вид корма	Количество единиц корма, которое ежедневно должны получать		Общее количество корма
	лисица	писец	
I	2	3	180
II	4	1	240
III	6	7	426
Прибыль от реализации одной шкурки, руб.	16	12	

Определить, сколько лисиц и песцов следует выращивать на звероферме, чтобы прибыль от реализации их шкурок была максимальной.

1.29 В студенческой столовой для изготовления бутербродов двух видов используются 4 вида ресурсов, общие объемы которых и нормы расхода указаны в таблице. Известна также прибыль, получаемая столовой от реализации одной партии бутербродов каждого вида.

Ресурсы	Нормы расхода ресурсов на одну партию бутербродов, кг/парт.		Имеющийся объем ресурсов, кг
	I вид бутербродов	II вид бутербродов	
I	4	3	42
II	2	5	56
III	3	6	38
VI	5	7	40

Прибыль от реализации одной партии бутербродов первого вида- 5 руб., 2-го вида- 7 руб. Запланировать выпуск партий бутербродов в таких количествах, чтобы общая прибыль столовой была максимальной. При этом необходимо учесть, что бутербродов первого вида необходимо подготовить не менее 4-х партий.

1.30 Из двух сортов бензина для определенных целей составляют 2 смеси- А и В. Смесь А состоит из 60 % бензина первого сорта и 40 %- 2-го сорта; смесь В имеет 80 % бензина первого сорта и 20 %- 2-го сорта.

Известно, что 1 т смеси А стоит 500 условных единиц, а 1 т смеси В- 600 условных единиц. В наличии имеется 100т бензина первого сорта и 60 т бензина 2-го сорта. Запланировать такой выпуск смесей, чтобы общая выручка от их реализации была максимальной.

2. Решить следующие задачи линейного программирования симплексным методом:

2.1

$$z = x_1 + x_2 - 3x_3 + 3x_4 + 4x_6 \to \min$$

$$\begin{cases} -2x_1 + 4x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 - 2x_2 + \quad + x_4 + x_5 = 7 \\ \qquad x_2 + \quad + 4x_4 + \ + x_6 = 7 \\ x_j \ge 0, \ j = 1,6 \end{cases}$$

2.2

$$z = -2x_1 + 3x_2 - x_3 - 4x_4 \to \min$$

$$\begin{cases} 4x_2 + 3x_3 + x_4 = 3 \\ x_1 \quad - 4x_3 \qquad = 7 \\ x_j \ge 0, \ j = 1,4 \end{cases}$$

2.3

$$z = -3x_1 \ - 4x_3 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + \ + x_4 = 5 \\ \ - x_2 + x_3 \qquad = 5 \\ x_j \ge 0, \ j = 1,4 \end{cases}$$

2.4

$$z = -4x_2 - 4x_3 + x_4 + 3x_5 \to \max$$

$$\begin{cases} -4x_2 + x_3 \quad + x_5 = 4 \\ 4x_2 \quad + x_4 - 3x_5 = 8 \\ x_1 \qquad\qquad + x_5 = 7 \\ x_j \ge 0, \ j = 1,5 \end{cases}$$

2.5

$$z = 2x_1 + x_2 + 4x_3 + 4x_5 \to \min$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ 2x_1 \ + x_3 + x_4 + x_5 = 5 \\ x_j \ge 0, \ j = 1,5 \end{cases}$$

2.6

$$z = -3x_1 + 4x_3 - 4x_4 + 3x_5 \to \min$$

$$\begin{cases} x_1 - 3x_3 + 2x_4 = 7 \\ x_2 \ + x_3 + x_4 = 3 \\ 4x_4 + x_5 = 7 \\ x_j \ge 0, \ j = 1,5 \end{cases}$$

2.7

$$z = x_1 - x_2 - x_4 \to \min$$

$$\begin{cases} 3x_2 \ + 2x_4 \le 5 \\ x_1 \qquad + 4x_4 = 6 \\ 3x_2 + x_3 \quad = 5 \\ x_j \ge 0, \ j = 1,4 \end{cases}$$

2.8

$$z = x_1 + x_2 + 4x_5 - 3x_6 \to \min$$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 \qquad = 5 \\ -2x_1 \quad + 2x_3 + 4x_4 + x_5 \quad = 5 \\ -x_1 \qquad - x_3 + 2x_4 \quad + x_6 = 0 \\ x_j \ge 0, \ j = 1,6 \end{cases}$$

2.9

$$z = 4x_1 + 4x_2 + x_4 + 4x_5 \to \min$$

$$\begin{cases} x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \\ \qquad 4x_3 \quad + x_5 = 6 \\ x_1 \qquad + x_3 + 3x_4 \ = 6 \\ x_j \ge 0, \ j = 1,5 \end{cases}$$

2.10

$$z = -2x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 \to \min$$

$$\begin{cases} x_3 + x_4 - 3x_5 = 4 \\ \qquad x_2 \quad + 4x_5 = 4 \\ x_1 \qquad + 4x_5 \ = 6 \\ x_j \ge 0, \ j = 1,5 \end{cases}$$

2.11

$$z = 4x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 \to \min$$

$$\begin{cases} -3x_1 + x_2 + x_3 \quad + 3x_5 \quad = 0 \\ 2x_1 + x_2 \qquad\qquad - x_5 + x_6 = 4 \\ 2x_1 - 3x_2 \quad + x_4 \qquad\quad = 5 \\ x_j \ge 0, \ j = 1,6 \end{cases}$$

2.12

$$z = 3x_1 + x_2 - 4x_3 - 2x_4 \to \max$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4 \le 6 \\ 4x_2 - 2x_3 + 2x_4 \le 7 \\ 3x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 4x_4 \le 5 \\ x_j \ge 0, \ j = 1,4 \end{cases}$$

2.13

$$z = 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 4x_4 - 3x_5 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \quad + 3x_5 = 6 \\ -x_1 \qquad + x_4 + x_5 = 6 \\ x_j \ge 0, \ j = 1,5 \end{cases}$$

2.14

$$z = 3x_1 + 3x_3 + 4x_4 \to \max$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_4 = 5 \\ 2x_1 + x_3 - x_4 = 5 \\ x_j \ge 0, \ j = 1,4 \end{cases}$$

2.15

$$z = -3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 \to \min$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - 4x_3 + 2x_4 \le 0 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 + 3x_4 \le 0 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 \le 6 \\ x_j \ge 0, \ j = 1,4 \end{cases}$$

2.16

$$z = -4x_1 + 2x_2 + 2 - 4x_3 + 2x_4 - 3x_5 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 + \quad 2x_3 \qquad = 8 \\ -4x_2 + 4x_3 + x_5 = 4 \\ 2x_2 - 3x_3 + x_4 \quad = 4 \\ x_j \ge 0, \ j = 1,5 \end{cases}$$

2.17

$$z = 2x_1 + x_2 + 4x_3 + 3x_4 + x_5 \to \min$$

$$\begin{cases} \quad 2x_2 + x_3 + 3x_5 = 7 \\ x_1 - x_2 \qquad - 2x_5 = 6 \\ \quad 2x_2 \quad + x_4 + 4x_5 = 0 \\ x_j \ge 0, \ j = 1,5 \end{cases}$$

2.18

$$z = 2x_1 - 3x_2 - 2x_4 \to \min$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 4x_4 \le 6 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 4x_4 \le 0 \\ -3x_1 + 4x_4 \le 7 \\ x_j \ge 0, \ j = 1,4 \end{cases}$$

2.19

$$z = -2x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 2x_4 + 3x_5 - 3x_6 \to \min$$

$$\begin{cases} \qquad 4x_3 - 3x_4 \ + x_6 = 4 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 - 4x_4 \qquad = 5 \\ 4x_1 \quad + 3x_3 + 3x_4 + x_5 = 8 \\ x_j \ge 0, \ j = 1,6 \end{cases}$$

2.20

$$z = 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 \to \min$$

$$\begin{cases} 2x_1 \quad + x_4 = 6 \\ 2 \quad + x_3 \quad = 3 \\ -2x_1 + x_2 \ \le 4 \\ x_j \ge 0, \ j = 1,4 \end{cases}$$

2.21

$$z = 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 8 \\ -x_2 + 3x_4 \le 7 \\ -3x_1 - 3x_2 + 4x_4 \le 6 \\ x_j \ge 0, \ j = 1,4 \end{cases}$$

2.22

$$z = -3x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 4x_4 \to \min$$

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 + 3x_4 \le 6 \\ -x_1 - 2x_2 - 2x_3 \le 0 \\ -3x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 4x_4 \le 5 \\ x_j \ge 0, \ j = 1,4 \end{cases}$$

2.23

$$z = -x_2 + 3x_3 + x_5 \to \min$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_4 + 3x_5 = 5 \\ x_2 + x_3 + 4x_4 + 4x_5 = 6 \\ x_j \ge 0,\ j = 1,5 \end{cases}$$

2.24

$$z = 3x_1 + x_2 + 2x_4 \to \min$$

$$\begin{cases} 2x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + 4x_2 + x_4 = 7 \\ x_j \ge 0,\ j = 1,4 \end{cases}$$

2.25

$$z = 3x_2 + 4x_4 + 3x_5 \to \min$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_4 + 3x_5 = 3 \\ 2x_1 + x_3 + x_4 + x_5 = 7 \\ x_j \ge 0,\ j = 1,5 \end{cases}$$

2.26

$$z = -2x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 2x_4 - 3x_5 \to \min$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 4x_4 - 3x_5 = 4 \\ x_3 - 3x_4 + 4x_5 = 6 \\ x_j \ge 0,\ j = 1,5 \end{cases}$$

2.27

$$z = -2x_1 + 3x_2 + 3x_4 \to \max$$

$$\begin{cases} x_3 + 3x_4 = 5 \\ x_1 + 2x_2 + x_4 = 5 \\ -4x_2 + 3x_4 + x_5 = 5 \\ x_j \ge 0,\ j = 1,5 \end{cases}$$

2.28

$$z = 2x_1 - 2x_2 + 4x_3 + 2x_4 - 3x_5 \to \min$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 7 \\ x_3 + 3x_4 = 6 \\ -x_2 + x_4 + x_5 = 4 \\ x_j \ge 0,\ j = 1,5 \end{cases}$$

2.29

$$z = x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 4x_4 - x_5 + 4x_6 \to \min$$

$$\begin{cases} -x_2 + x_4 + 2x_6 = 7 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 3 \\ -4x_2 + x_3 + x_5 + 2x_6 = 8 \\ x_j \ge 0,\ j = 1,6 \end{cases}$$

2.30

$$z = -4x_2 - 4x_3 + x_4 + 3x_5 \to \max$$

$$\begin{cases} -4x_2 + x_3 + x_5 = 4 \\ 4x_2 + x_4 - 3x_5 = 8 \\ x_1 + x_5 = 7 \\ x_j \ge 0,\ j = 1,5 \end{cases}$$

3. Построить математическую модель задачи о минимизации отходов.

3.1. Для изготовления брусков трех размеров 0.5, 1 и 1.5 м на распил поступают бревна длиной в 4 м. При этом брусков по 0.5 м необходимо не менее 15, кусков по 1 м необходимо не менее 15 и не более 20, брусков по 1.5 м необходимо не более 20. Определить оптимальный план распила бревен.

3.2. На фабрике имеются рулоны дорожек по 15 м. В магазин необходимо поставить дорожки длиной 5 м в количестве 22 шт., длиной 4 м в количестве 30 шт., длиной 3 м в количестве 20 шт. Определить, какими способами надо разрезать рулоны так, чтобы отходы были минимальными.

3.3. Куски кожи по 48 дм разрезать на куски по 10, 15 и 20 дм так, чтобы кусков по 10 дм было не менее 6 шт., кусков по 15 дм было не более 10 шт. и кусков по 20 дм было не менее 4 шт. Определить оптимальный план раскроя кожи.

3.4. На фабрике имеются в наличии рулоны линолеума длиной по 20 м. Необходимо разрезать линолеум на куски по 5, 13 и 15 м так, чтобы кусков по 5 м было не менее 7 шт., кусков по 13 м было не более 3 шт. и кусков по 15 м было не менее 4 шт. Определить оптимальный план раскроя линолеума.

3.5. Куски фанеры по 50 дм разрезать на куски по 8, 15 и 22 дм так, чтобы кусков по 8 дм было не менее 5 шт., кусков по 15 дм было не более 13 шт. и кусков по 22 дм было не менее 4 шт. Определить оптимальный план раскроя фанеры.

3.6. Рулоны ткани длиной 9 м следует разрезать на куски длиной 1.5, 2 и 2.5 м. При этом кусков по 1.5 м необходимо не менее 40, кусков по 2 м необходимо не менее 35 и не более 21, кусков по 2.5 м необходимо не более 33. Определить оптимальный план раскроя ткани.

3.7. Для изготовления брусков трех размеров 1.5, 2 и 3 м на распил поступают бревна длиной в 7 м. При этом брусков по 1.5 м необходимо не менее 25, брусков по 2 м необходимо не менее 10 и не более 25, брусков по 3 м необходимо не более 23. Определить оптимальный план распила бревен.

3.8. На фабрике имеются в наличии рулоны дорожек по 10 м. В магазин нужно поставить дорожки длиной 5 м в количестве 32 шт., длиной 4 м - 50 шт., длиной 3 м - 30 шт. Определить, какими способами нужно разрезать рулоны так, чтобы отходы были минимальными.

3.9. Куски кожи по 48 дм разрезать на куски по 15, 18 и 20 дм так, чтобы кусков по 15 дм было не менее 8 шт., кусков по 18 дм было не более 12 шт. и кусков по 20 дм было не менее 6 шт. Определить оптимальный план раскроя кожи.

3.10. Куски фанеры длиной 40 дм разрезать на куски по 9, 13 и 20 дм так, чтобы кусков по 9 дм было не менее 10 шт., кусков по 13 дм было не более 15 шт. и кусков по 20 дм было не менее 8 шт. Определить оптимальный план раскроя фанеры.

3.11. На фабрике есть в наличии рулоны дорожек по 25 м. В магазин нужно поставить дорожки длиной 7 м в количестве 20 шт., длиной 6 м - 35 шт., длиной 9 м - 32 шт. Определить, какими способами нужно разрезать рулоны так, чтобы отходы были минимальными.

3.12. Для изготовления брусков трех размеров 1.5, 2.5 и 3 м на распил поступают бревна длиной 11 м. При этом брусков по 1.5 м необходимо не менее 10, брусков по 2.5 м - не менее 15 и не более 26, брусков по 3 м необходимо не более 20. Определить оптимальный план распила бревен.

3.13. Рулоны ткани длиной 8 м следует разрезать на куски длиной 1.5, 2 и 2.5 м. При этом кусков по 1.5 м необходимо не менее 10, кусков по 2 м - не менее 15 и не более 20, кусков по 2.5 м - не более 35. Определить оптимальный план раскроя ткани.

3.14. Для изготовления брусков трех размеров 0.5, 1 и 1.5 м на распил поступают бревна длиной 4 м. При этом брусков по 0.5 м необходимо не менее 15, брусков по 1 м - не менее 15 и не более 20, брусков по 1.5 м - не более 20. Определить оптимальный план распила бревен.

3.15. На фабрике имеются в наличии рулоны дорожек по 15 м. В магазин нужно поставить дорожки длиной 5 м в количестве 22 шт., длиной 4 м - 30 шт., длиной 3 м - 20 шт. Определить, какими способами нужно разрезать рулоны так, чтобы отходы были минимальными.

16. Куски кожи по 68 дм разрезать на куски по 10, 12 и 20 дм так, чтобы кусков по 10 дм было не менее 6 шт., кусков по 12 дм - не более 10 шт. и кусков по 20 дм - не менее 4 шт. Определить оптимальный план раскроя кожи.

3.17. На фабрике имеются рулоны линолеума длиной по 20 м. Необходимо разрезать линолеум на куски по 5, 13 и 15 м так, чтобы кусков по 5 м было не менее 7 шт., кусков по 13 м - не более 3 шт. и кусков по 15 м - не менее 4 шт. Определить оптимальный план раскроя линолеума.

3.18. Куски фанеры по 60 дм разрезать на куски по 8, 15 и 22 дм так, чтобы кусков по 8 дм было не менее 5 шт., кусков по 15 дм - не более 13 шт. и кусков по 22 дм - не менее 4 шт. Определить оптимальный план раскроя фанеры.

3.19. Рулоны ткани длиной 9 м следует разрезать на куски длиной 1.5, 2 и 2.5 м.При этом кусков по 1.5 м необходимо не менее 40, кусков по 2 м - не менее 21 и не более 35, кусков по 2.5 м - не более 33. Определить оптимальный план раскроя ткани.

3.20. Для изготовления брусков трех размеров 1.5, 2 и 3 м на распил поступают бревна длиной 10 м. При этом брусков по 1.5 м необходимо не менее 25, брусков по 2 м - не менее 10 и не более 25, брусков по 3м - не более 23. Определить оптимальный план распила бревен.

3.21. На фабрике есть рулоны дорожек по 30 м. В магазин нужно поставить дорожки длиной 7 м в количестве 20 шт., длиной 6 м - 35шт., длиной 9 м - 32 шт. Определить, какими способами нужно разрезать рулоны так, чтобы отходы были минимальными.

3.22. Для изготовления брусков трех размеров 1.5, 2 и 2.5 м на распил поступают бревна длиной 4 м. При этом брусков по 1.5 м необходимо не менее 15, брусков по 2 м - не менее 15 и не более 20, брусков по 2.5 м - не более 20.Определить оптимальный план распила бревен.

3.23. На фабрике имеются в наличии рулоны дорожек по 15 м. В магазин нужно поставить дорожки длиной 7 м в количестве 22 шт., длиной 10 м - 30 шт., длиной 12 м - 20 шт.Определить, какими способами нужно разрезать рулоны так, чтобы отходы были минимальными.

3.24. Куски кожи по 60 дм разрезать на куски по 20, 25 и 30 дм так, чтобы кусков по 20 дм было не менее 6 шт., кусков по 25 дм - не более 10шт. и кусков по 30 дм - не менее 4 шт. Определить оптимальный план раскроя кожи.

3.25. На фабрике имеются рулоны линолеума длиной по 25 м. Необходимо разрезать линолеум на куски по 10, 12 и 15 м так, чтобы кусков по 10 м было не менее 7 шт., кусков по 12 м - не более 3 шт. и кусков по 15 м - не менее 4 шт. Определить оптимальный план раскроя линолеума.

3.26. Рулоны ткани длиной 7 м следует разрезать на куски длиной 1, 1.5 и 2 м. При этом кусков по 1 м необходимо не менее 30, кусков по 1.5 м - не менее 25 и не более 40, кусков по 2 м - не более 33. Определить оптимальный план раскроя ткани.

3.27. Куски фанеры по 55 дм разрезать на куски по 8, 12 и 20 дм так, чтобы кусков по 8 дм было не менее 6 шт., кусков по 12 дм - не более 15 шт. и кусков по 20 дм - не менее 3 шт. Определить оптимальный план раскроя фанеры.

3.28. На фабрике имеются в наличии рулоны дорожек по 18 м. В магазин нужно поставить дорожки длиной 8 м в количестве 20 шт., длиной 12 м - 32 шт., длиной 16 м - 24 шт. Определить, какими способами нужно разрезать рулоны так, чтобы отходы были минимальными.

3.29. Рулоны ткани длиной 5 м следует разрезать на куски длиной 0.5, 0.8 и 1.5 м. При этом кусков по 0.5 м необходимо не менее 17, кусков по 0.8 м - не менее 16 и не более 21, кусков по 1.5 м - не более 5. Определить оптимальный план раскроя ткани.

3.30. На фабрике имеются рулоны линолеума длиной по 30 м. Необходимо разрезать линолеум на куски по 7, 15 и 17 м так, чтобы кусков по 7 м было не менее 8 шт., кусков по 15 м - не более 4 шт. и кусков по 17 м - не менее 8 шт. Определить оптимальный план раскроя линолеума.

4. Для следующих задач линейного программирования построить двойственные задачи. Решив одну из задач найти решение другой.

4.1

$$z = 2x_1 + 3x_2 \to \min$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 7 \\ x_1 + 3x_2 \ge 4 \\ x_j \ge 0,\ j = 1,2 \end{cases}$$

4.2

$$z = 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 \to \max$$

$$\begin{cases} 2x_2 - x_3 \ge 8 \\ x_1 + x_2 + 4x_3 = 8 \\ x_j \ge 0,\ j = 1,3 \end{cases}$$

4.3

$$z = -x_2 + x_3 \to \max$$

$$\begin{cases} 3x_2 - x_4 = 5 \\ x_1 + 2x_3 = 6 \\ 2x_2 + 3x_3 \ge 7 \\ x_j \ge 0,\ j = 1,4 \end{cases}$$

4.4

$$z = 2x_4 \to \min$$

$$\begin{cases} x_1 + 4x_3 = 4 \\ x_2 - 2x_4 = 4 \\ x_3 + 4x_4 \ge 5 \\ x_j \ge 0,\ j = 1,4 \end{cases}$$

4.5

$$z = 2x_1 - x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} 3x_2 \le 8 \\ -x_1 + x_3 = 3 \\ -4x_1 + 3x_2 \ge 4 \\ x_j \ge 0,\ j = 1,3 \end{cases}$$

4.6

$$z = 4x_2 + 3x_3 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 6 \\ 3x_2 \le 0 \\ 2x_1 + 4x_2 \ge 8 \\ x_j \ge 0,\ j = 1,3 \end{cases}$$

4.7

$$z = -2x_1 + 4x_2 - x_3 \to \max$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 \le 4 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ 3x_1 + 4x_2 \ge 4 \\ x_j \ge 0,\ j = 1,3 \end{cases}$$

4.8

$$z = -2x_2 + 2x_3 \to \min$$

$$\begin{cases} -3x_1 + 3x_2 \ge 0 \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 = 5 \\ x_j \ge 0,\ j = 1,3 \end{cases}$$

4.9

$$z = 3x_1 + 2x_3 \to \max$$

$$\begin{cases} -x_2 + 3x_4 \ge 3 \\ x_3 + 2x_4 = 8 \\ x_1 - 2x_2 = 3 \\ x_j \ge 0,\ j = 1,4 \end{cases}$$

4.10

$$z = -3x_1 - x_3 \to \max$$

$$\begin{cases} -3x_1 + 4x_2 = 6 \\ -x_1 + 4x_3 \le 4 \\ 4x_2 - 2x_3 \ge 5 \\ x_j \ge 0,\ j = 1,3 \end{cases}$$

4.11

4.12

$$z = 3x_1 + 2x_2 \to \min$$
$$\begin{cases} x_1 \ge 0 \\ x_3 = 7 \\ 4x_1 + x_2 = 7 \\ x_j \ge 0,\ j = 1,3 \end{cases}$$

$$z = 2x_1 + x_2 \to \min$$
$$\begin{cases} x_1 - 4x_3 = 7 \\ x_2 = 7 \\ x_2 - 3x_3 \ge 0 \\ x_j \ge 0,\ j = 1,3 \end{cases}$$

4.13

$$z = 4x_2 - x_3 \to \min$$
$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 4 \\ x_2 + 3x_3 \ge 3 \\ x_j \ge 0,\ j = 1,3 \end{cases}$$

4.14

$$z = -2x_2 + 3x_3 \to \min$$
$$\begin{cases} 3x_1 = 4 \\ x_2 + 4x_3 = 8 \\ 2x_1 + 4x_3 \ge 6 \\ x_j \ge 0,\ j = 1,3 \end{cases}$$

4.15

$$z = -3x_3 - x_4 \to \max$$
$$\begin{cases} x_2 + 4x_3 = 6 \\ x_1 + x_4 = 8 \\ 4x_1 + 4x_3 \ge 6 \\ x_j \ge 0,\ j = 1,4 \end{cases}$$

4.16

$$z = 2x_1 + 2x_3 \to \min$$
$$\begin{cases} 3x_2 \le 4 \\ 3x_1 + 2x_2 \ge 5 \\ -4x_1 + 2x_3 = 6 \\ x_j \ge 0,\ j = 1,3 \end{cases}$$

4.17

$$z = x_1 + 2x_2 \to \min$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 8 \\ 3x_1 \ge 5 \\ x_j \ge 0,\ j = 1,2 \end{cases}$$

4.18

$$z = 4x_1 + 2x_2 + x_3 \to \min$$
$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 + x_3 = 8 \\ 2x_1 + x_2 \ge 6 \\ x_j \ge 0,\ j = 1,3 \end{cases}$$

4.19

$$z = 3x_1 + 2x_2 + x_3 \to \min$$
$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 8 \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 \ge 7 \\ x_j \ge 0,\ j = 1,3 \end{cases}$$

4.20

$$z = -2x_1 + 2x_3 \to \max$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ 4x_1 + 3x_3 \ge 6 \\ x_j \ge 0,\ j = 1,3 \end{cases}$$

4.21

$$z = 2x_1 + x_2 \to \max$$
$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5 \\ x_1 + x_2 - x_3 \ge 0 \\ x_j \ge 0,\ j = 1,3 \end{cases}$$

4.22

$$z = 2x_1 + 2x_3 \to \min$$
$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 = 6 \\ 4x_3 = 0 \\ 4x_2 + 2x_3 \ge 8 \\ x_j \ge 0,\ j = 1,3 \end{cases}$$

4.23

4.24

$$z = 3x_2 + 3x_3 \to \min$$
$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 6 \\ x_2 - 2x_4 \ge 6 \\ 2x_2 + 4x_4 \ge 4 \\ x_j \ge 0,\ j = 1,4 \end{cases}$$

$$z = 3x_1 + 2x_3 \to \max$$
$$\begin{cases} 4x_1 + 4x_3 \le 7 \\ x_2 = 4 \\ 4x_1 + 3x_3 \ge 0 \\ x_j \ge 0,\ j = 1,3 \end{cases}$$

4.25

$$z = 3x_1 + 2x_2 \to \min$$
$$\begin{cases} -3x_1 + 3x_2 = 5 \\ -3x_1 + 4x_2 \ge 0 \\ x_j \ge 0,\ j = 1,2 \end{cases}$$

4.26

$$z = 2x_3 \to \min$$
$$\begin{cases} -4x_1 + 2x_3 \le 5 \\ 2x_1 - 2x_2 = 0 \\ -2x_1 + 2x_3 \ge 5 \\ x_j \ge 0,\ j = 1,3 \end{cases}$$

4.27

$$z = 3x_1 + 2x_2 \to \min$$
$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 = 6 \\ x_1 + 4x_3 \le 8 \\ 4x_3 \ge 7 \\ x_j \ge 0,\ j = 1,3 \end{cases}$$

4.28

$$z = -3x_2 - x_4 \to \max$$
$$\begin{cases} x_1 - 4x_4 = 6 \\ x_2 + x_3 = 6 \\ x_3 - 3x_4 \ge 3 \\ x_j \ge 0,\ j = 1,4 \end{cases}$$

4.29

$$z = 2x_2 + 2x_3 \to \min$$
$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ 2x_1 + 4x_3 = 8 \\ x_j \ge 0,\ j = 1,3 \end{cases}$$

4.30

$$z = -3x_1 + 3x_4 \to \min$$
$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_4 \ge 6 \\ x_3 + 2x_4 = 7 \\ x_1 + x_2 = 5 \\ x_j \ge 0,\ j = 1,4 \end{cases}$$

5. В следующих транспортных задачах найти такие объемы перевозок однородной продукции от поставщиков к потребителям при которых общие затраты на перевозку продукции будут минимальными. В таблицах заданы объемы запасов продукции у поставщиков (A_i), объемы потребности в продукции потребителей (B_j) и удельные затраты на перевозку единицы продукции от поставщиков к потребителям (пересечение соответствующих строк и столбцов таблицы).

5.1

A_i \ B_j		1	2	3
		146	17	36
1	31	2	5	0
2	82	5	0	7
3	127	7	5	6

5.2

A_i \ B_j		1	2	3	4
		98	29	102	69
1	28	4	2	1	6
2	69	0	4	5	3

5.3

A_i \ B_j		1	2	3	4
		55	124	173	158
1	98	0	5	2	3
2	23	2	5	6	2

5.4

A_i \ B_j		1	2	3	4
		71	185	199	94
1	34	4	2	6	1
2	126	4	6	2	0

5.5

A_i \ B_j		1	2	3	4
		113	149	8	65
1	183	2	6	2	4
2	49	0	4	3	1
3	180	4	7	2	2

5.6

A_i \ B_j		1	2	3	4	5
		136	138	194	87	15
1	169	0	6	1	1	1
2	143	1	7	2	5	4

5.7

A_i \ B_j		1	2	3
		6	51	125
1	163	4	7	2
2	29	1	2	1
3	12	6	1	5

5.8

A_i \ B_j		1	2	3	4	5
		16	104	189	8	89
1	149	1	3	5	1	3
2	107	4	2	0	3	4

5.9

A_i \ B_j		1	2	3	4	5
		175	173	70	175	31
1	25	6	4	3	4	0
2	143	7	1	2	3	0

5.10

A_i \ B_j		1	2	3	4
		89	161	59	157
1	183	0	2	4	7
2	10	1	7	6	1

5.11

A_i \ B_j		1	2	3	4
		74	112	186	118
1	141	3	2	6	7
2	80	0	5	0	7
3	170	3	7	6	0

5.12

A_i \ B_j		1	2	3	4	5
		7	65	196	187	121
1	23	1	3	7	4	1
2	51	5	4	3	6	6

5.13

A_i \ B_j		1	2	3	4
		157	120	166	191
1	119	7	4	6	3
2	90	6	4	3	0
3	141	1	1	6	4

5.14

A_i \ B_j		1	2	3
		56	102	111
1	128	6	7	3
2	97	3	7	5
3	138	0	0	2
4	59	7	1	2

5.15

A_i \ B_j		1	2
		96	183
1	139	2	5
2	39	7	6
3	95	6	5
4	33	5	7
5	16	1	3

5.16

A_i \ B_j		1	2	3
		19	119	43
1	198	1	7	4
2	36	2	4	5
3	198	5	7	1

5.17

A_i \ B_j		1	2
		188	18
1	146	7	1
2	114	2	6
3	19	5	1
4	163	3	2
5	32	2	5

5.18

A_i \ B_j		1	2
		35	171
1	146	6	6
2	83	3	4
3	89	5	7
4	35	3	3

5.19

A_i \ B_j		1	2
		33	113
1	176	2	6
2	146	1	6
3	94	3	4
4	38	5	1

5.20

A_i \ B_j		1	2	3	4	5
		165	7	19	93	191
1	106	5	0	2	0	6
2	11	6	3	7	4	4

5.21

A_i \ B_j		1	2	3
		143	163	166
1	89	4	5	3
2	9	1	3	3
3	181	6	5	7
4	156	7	4	6

5.22

A_i \ B_j		1	2	3	4
		16	35	54	164
1	25	2	3	5	4
2	161	4	2	2	4

5.23

A_i \ B_j		1	2	3	4
		131	119	98	170
1	41	6	3	1	3
2	122	3	1	6	6

5.24

A_i \ B_j		1	2	3	4
		33	140	157	117
1	145	2	3	7	2
2	75	1	5	7	1

5.25

A_i \ B_j		1	2	3	4
		95	57	132	29
1	145	3	0	2	1
2	103	6	2	4	4
3	91	7	2	4	7

5.26

A_i \ B_j		1	2	3	4
		124	53	136	136
1	111	0	6	7	6
2	113	0	3	7	1
3	77	5	2	6	2

5.27

A_i \ B_j		1	2	3
		157	165	45
1	41	4	2	6
2	145	0	4	7
3	133	6	1	2

5.28

A_i \ B_j		1	2	3	4
		42	60	97	167
1	89	7	2	5	7
2	56	3	2	0	1
3	153	4	2	7	2

5.29

A_i \ B_j		1	2	3	4	5
		20	104	45	62	169
1	46	1	4	4	3	7
2	21	0	3	3	1	7

5.30

A_i \ B_j		1	2
		103	77
1	158	2	6
2	135	1	3
3	27	2	7
4	43	2	3
5	97	1	5

6. Составить сетевой график выполнения работ и рассчитать временные параметры по данным, представленным в таблице

Содержание работы	***Обозна-чение***	***Предыдущая работа***	***Продолжитель-ность, дн.***
Исходные данные на изделие	a_1		
Заказ комплектующих деталей	a_2	a_1	t_1
Выпуск документации	a_3	a_1	t_2
Изготовление деталей	a_4	a_3	t_3
Поставка комплектующих деталей	a_5	a_2	t_4
Сборка изделия	a_6	a_4, a_5	t_5
Выпуска документации на испытание	a_7	a_3	t_6
Испытание и приемка изделия	a_8	a_6, a_7	t_7, t_8

Значения коэффициентов условия задачи

№ варианта / значения	1,11, 21	2,12, 22	3,13, 23	4,14, 24	5,15, 25	6,16, 26	7,17, 27	8,18, 28	9,19 29	10,20, 30
t_1	30	33	36	35	25	20	15	30	25	20
t_2	7	9	8	6	8	11	10	5	9	7
t_3	15	17	18	14	16	20	12	13	20	19
t_4	35	33	32	34	31	35	30	37	39	38
t_5	25	24	21	20	22	23	26	25	18	21
t_6	13	15	10	12	13	16	17	16	18	16
t_7	12	16	9	11	9	14	19	14	15	19
t_8	14	17	13	13	11	18	18	19	17	20

7. С помощью метода динамического программирования определить оптимальное распределение капиталовложений, полная выделяемая сумма которых обозначена через К, между четырьмя предприятиями, чтобы общий прирост продукции, выраженный в относительных единицах, был максимальным.

В таблицах всех вариантов слева в первом вертикальном столбце указаны возможные доли выделения капиталовложений в тыс. грн. В остальных столбцах приведены приросты продукции в относительных единицах g_i (x) по каждому i-му предприятию (i=1,2,3,4) в зависимости от вложения средств x.

В таблице 1 приводим верхнюю зону полных наименований для каждого варианта, чтобы не делать это в каждом таблице.

Таблица 1

Выделяемые капиталовложения X, тыс.грн.	Прирост продукции в относительных единицах			
	g_1 (x)	g_2 (x)	g_3 (x)	g_4 (x)

7.1

x, тыс.грн.	g_1 (x)	g_2 (x)	g_3 (x)	g_4 (x)
100	50	40	90	70
200	100	60	100	80
300	150	80	120	170
К=400	200	100	130	200

7.2

x, тыс.грн.	g_1 (x)	g_2 (x)	g_3 (x)	g_4 (x)
25	15	20	35	30
50	25	46	44	52
75	45	50	85	80
К=100	60	72	90	102

7.3

x, тыс.грн.	g_1 (x)	g_2 (x)	g_3 (x)	g_4 (x)
40	24	30	26	38
80	50	70	68	49
120	95	84	112	78
К=160	134	149	120	150

7.4

x, тыс.грн.	g_1 (x)	g_2 (x)	g_3 (x)	g_4 (x)
20	15	18	20	20
40	20	25	30	35
60	40	38	35	15
К=80	55	51	59	30

7.5

x, тыс.грн.	g_1 (x)	g_2 (x)	g_3 (x)	g_4 (x)
100	55	29	30	33
200	64	60	67	65
300	125	110	115	140
К=400	190	184	187	195

7.6

x, тыс.грн.	g_1 (x)	g_2 (x)	g_3 (x)	g_4 (x)
25	10	20	15	5
50	20	25	25	30
75	25	30	60	40
К=100	70	60	75	80

7.7

x, тыс.грн.	g_1 (x)	g_2 (x)	g_3 (x)	g_4 (x)
30	25	20	15	25
60	50	30	30	35
90	65	40	60	45
К=120	95	60	90	55

7.8

x, тыс.грн.	g_1 (x)	g_2 (x)	g_3 (x)	g_4 (x)
60	30	35	55	40
120	75	80	92	100
180	110	130	125	137
К=240	150	155	180	175

7.9

x, тыс.грн.	g_1 (x)	g_2 (x)	g_3 (x)	g_4 (x)
50	30	40	35	25
100	95	70	80	65
150	110	120	100	115
К=200	130	150	160	175

7.10

x, тыс.грн.	g_1 (x)	g_2 (x)	g_3 (x)	g_4 (x)
20	15	5	10	30
40	30	12	33	47
60	42	45	41	65
К=80	99	65	50	70

7.11

x, тыс.грн.	g_1 (x)	g_2 (x)	g_3 (x)	g_4 (x)
25	10	15	5	30
50	25	30	50	45
75	65	40	60	67
К=100	80	75	65	80

7.12

x, тыс.грн.	g_1 (x)	g_2 (x)	g_3 (x)	g_4 (x)
15	10	5	8	35
30	15	20	10	45
45	20	25	12	55
К=60	45	50	30	60

7.13

x, тыс.грн.	g_1 (x)	g_2 (x)	g_3 (x)	g_4 (x)
60	18	20	23	27
120	28	35	37	51
180	57	60	54	71
К=240	20	85	76	82

7.14

x, тыс.грн.	g_1 (x)	g_2 (x)	g_3 (x)	g_4 (x)
100	60	55	70	40
200	70	30	65	50
300	65	45	50	70
К=400	30	125	60	225

7.15

x, тыс.грн.	g_1 (x)	g_2 (x)	g_3 (x)	g_4 (x)
30	10	12	9	15
60	24	29	30	33
90	65	60	58	98
К=120	98	100	105	110

РЕШЕНИЕ НУЛЕВОГО ВАРИАНТА

1. Пусть химический цех может производить ценные вещества двух наименований – B_1 и B_2. Известно, что производство этих веществ зависит от наличия четырех ресурсов (сырья, энергии, временного ресурса автоматов-производителей). Нормозатраты каждого из ресурсов на производство 1 кг вещества известны и приведены в таблице, где также указаны имеющиеся ресурсы и прибыль от реализации производимых веществ.

Вид ресурса	Норма затрат на производство1 кг вещества, усл. ед./кг		Наличие ресурсов, усл.ед
	B_1	B_2	
P_1	6	3	60
P_2	2	5	40
P_3	9	0	81
P_4	0	8	56
Прибыль от реализации 1 кг вещества, руб.	4	5	

Учитывая наличие ресурсов, нормозатраты и прибыль, необходимо составить такой план выпуска веществ B_1 и B_2, который бы обеспечил цеху наибольшую суммарную прибыль.

Чтобы решать задачу с помощью математических приемов, следует сначала составить ее математическую модель.

Решение. Для построения модели введем переменные величины. Обозначим через X_1 – план выпуска вещества B_1и X_2 – план выпуска вещества B_2. Эти величины нужно определить, и они должны быть такими, чтобы получалась максимальная прибыль, которую обозначим через Z. В этой задаче ограничено наличие ресурсов. Ресурсы P_1 имеют запас 60 усл.ед. Очевидно, что суммарные затраты на выпуск веществ B_1 и B_2 не должны превысить 60. Из таблицы видно, что нормозатраты P_1 (первого вида ресурсов) на 1 кг вещества B_1составляют 6 усл.ед., тогда затраты на весь план выпуска B_1 составляют $6x_1$. Соответственно нормозатраты P_1 на 1 кг вещества B_2 равны 3 усл.ед. и затраты на план выпуска B_2 составляют $3x_2$. Следовательно, суммарные затраты ресурса P_1 составят $(6x_1+3x_2)$ и не должны превысить величину запасов ресурса P_1 т.е. 60 единиц. Итак, по ресурсу P_1 имеем неравенство $6x_1+3x_2 \leq 60$. Аналогично условия-ограничения можно записать и для ресурсов P_2 , P_3, P_4 :

$$2x_1+5x_2 \leq 40,$$
$$9x_1 \leq 81,$$
$$8x_2 \leq 56.$$

Видно, что ресурс P_3 используется лишь на производство вещества B_1, а ресурс P_4 - на производство вещества B_2. Из ограничении еще надо учесть неотрицательность планов выпуска веществ, т.е. $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$.

Для составления модели остается сформировать целевую функцию прибыли Z . Прибыль Z складывается из прибыли за реализацию вещества B_1 и прибыли за реализацию вещества B_2. Так как выпуск вещества B_1обозначен через x_1, а прибыль от реализации 1 кг вещества B_1 равна 4 руб., то прибыль от всего выпуска вещества B_1 будет равна $4x_1$. Соответственно прибыль от реализации всего вещества B_2 будет равна $5x_2$. Тогда суммарная прибыль составит целевую функцию задачи:

$$Z = 4x_1 + 5x_2.$$

В итоге можно сформировать следующую математическую модель задачи: найти такие значения переменных x_1 и x_2 которые бы отвечали условиям:

$$\begin{cases} x_1 \geq 0, \\ \qquad x_2 \geq 0, \\ 6x_1 + 3x_2 \leq 60, \\ 2x_1 + 5x_2 \leq 40, \\ 9x_1 \qquad \leq 81 \\ \qquad 8x_2 \leq 56, \end{cases}$$

и обеспечивали максимум целевой функции

$$Z = 4x_1 + 5x_2 \rightarrow \max.$$

Задача находится в стандартной форме и имеет две переменные, а следовательно, может быть решена графическим методом. Строим ОДР (область допустимых решений) для переменных задачи.

Для построения ОДР необходимо построить все граничные прямые:

$6x_1+3x_2 = 60$ (1)

$2x_1+5x_2 = 40$ (2)

$9x_1=81$ (3)

$8x_2=56$ (4)

$x_1=0$ (5)

$x_2=0$ (6)

Для построения прямой достаточно построить две точки этой прямой.

1. $6x_1+3x_2 = 60$ $\begin{cases} x_1 = 7, \\ x_2 = 6; \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 = 10, \\ x_2 = 0. \end{cases}$

По этим двум точкам строим прямую.

Определяем, какая из полуплоскостей является решением неравенства $6x_1+3x_2 \leq 60$. Для этого подставляем координаты контрольной точки в это неравенство. Для простоты вычислений в качестве контрольной возьмем точку (0; 0). Получим: 0<60. Такое неравенство является верным и, следовательно, полуплоскость, на которой расположена точка (0; 0), является искомой.

2. $2x_1+5x_2 = 40$ $\begin{cases} x_1 = 5, \\ x_2 = 6; \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 = 10, \\ x_2 = 4. \end{cases}$

Аналогично определяем, какая из полуплоскостей является решением для всех остальных неравенств.

3. $9x_1=81$;

$x_1=9$. Это прямая проходит параллельно оси Ox_2.

4. $8x_2=56$;

$x_2=7$. Это прямая проходит параллельно оси Ox_1.

5. $x_1 \geq 0$ - это правая полуплоскость системы координат.

6. $x_2 \geq 0$ - это верхняя полуплоскость системы координат.

Найдем пересечение всех построенных полуплоскостей. Им будет многоугольник ABCDEG (рис. 1).

Строим вектор возрастания целевой функции $\vec{h} = \{4,5\}$. Для этого строим точку с координатами (4. 5) и строим к ней вектор от начала координат.

Далее строим вспомогательную прямую Z=0, которая перпендикулярна вектору возрастания целевой функции. Перемещаем прямую Z=0 параллельно самой себе в направлении вектора возрастания целевой функции, (т.к. находим максимальное значение целевой функции) до тех пор, пока прямая Z=0 не пересечет последнюю точку ОДР. Эта точка и будет определять оптимальное решение задачи. В данном случае это точка D (рис. 1).

Для определения координат оптимальной точки необходимо решить систему соответствующих линейных уравнений тех условий, на пересечении которых находится оптимальная точка

D: $\begin{cases} 6x_1 + 3x_2 = 60, \\ 2x_1 + 5x_2 = 40; \end{cases}$

Решив данную систему уравнений получим $\begin{cases} x_1 = 5, \\ x_2 = 7{,}5. \end{cases}$

Для нахождения оптимального значения целевой функции, необходимо координаты оптимальной точки подставить в целевую функцию и вычислить её значение.

$Z_{max}=55$.

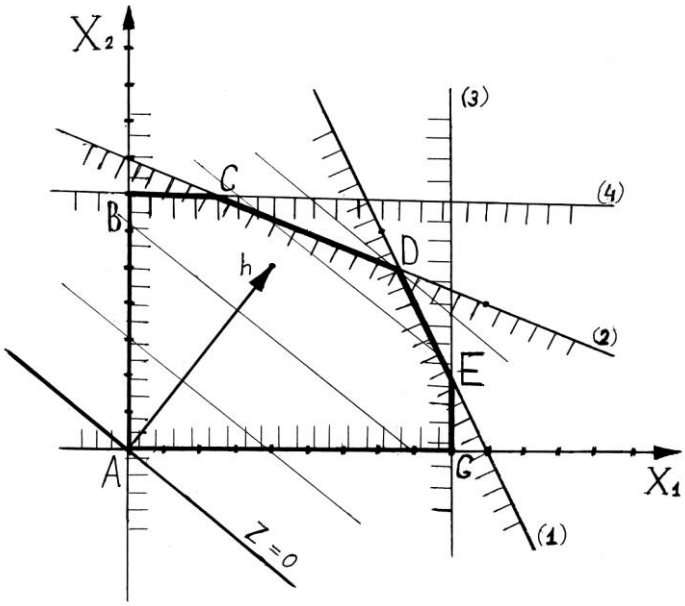


Рис.1

Значит, химический цех должен произвести 5 кг вещества B_1 и 7,5 кг вещества B_2, чтобы обеспечить цеху наибольшую суммарную прибыль от реализации производимых веществ в размере 55 руб.

2. Решить симплекс-методом следующую задачу линейного программирования

$$Z = 2X_1 - X_2 + 3X_3 - 2X_4 \to \max.$$

$$\begin{cases} -X_1 + X_2 + X_3 = 1 \\ X_1 + X_2 \le 2 \\ X_1 - X_2 + X_4 = 1 \end{cases}$$

$$X_j \ge 0, \quad j = \overline{1,4}$$

Решение.

1. Задачу необходимо привести к каноническому виду:

$$Z' = -2X_1 + X_2 - 3X_3 + 2X_4 \to \min$$

$$\begin{cases} -X_1 + X_2 + X_3 = 1 \\ X_1 + X_2 + X_5 = 2 \\ X_1 - X_2 + X_4 = 1 \end{cases}$$

$$X_j \ge 0, \; j = \overline{1,5}$$

2. Выпишем векторы:

$$\overline{A_1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; \overline{A_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \; \overline{A_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; \overline{A_4} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \; \overline{A_5} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; \overline{A_Б} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Векторы $\overline{A_3}$, $\overline{A_5}$, $\overline{A_4}$ образуют единичный базис, потому они базисные, а переменные x_3, x_4, x_5 – базисные переменные. Следовательно, задача имеет исходный опорный план: $X_{Бо} = (0;0;1;1;2)$.

3. Строим исходную симплексную таблицу:

Б	$\overline{C_Б}$	$\overline{A_Б}$	$\overline{A_1}$	$\overline{A_2}$	$\overline{A_3}$	$\overline{A_4}$	$\overline{A_5}$	
			-2	1	-3	2	0	
$\overline{A_3}$	-3	1	-1	1	1	0	0	Таблица 1
$\overline{A_5}$	0	2	1	1	0	0	1	
$\overline{A_4}$	2	1	1	-1	0	1	0	
$Z'_j - c_j$		-1	7	-6	0	0	0	
$\overline{A_3}$	-3	2	0	0	1	1	0	Таблица 2
$\overline{A_5}$	0	1	0	2	0	-1	1	
$\overline{A_1}$	-2	1	1	-1	0	1	0	
$Z'_j - c_j$		-8	0	1	0	-7	0	

$\overline{A_3}$	-3	2	0	0	1	1	0	Таблица 3
$\overline{A_2}$	1	1/2	0	1	0	-1/2	1/2	
$\overline{A_1}$	-2	3/2	1	0	0	1/2	1/2	
$Z'_j - c_j$		-17/2	0	0	0	-13/2	-1/2	

Рассмотрим табл.1.

Строка $Z'_j - c_j$ называется индексной, значения элементов новой индексной строки находятся с помощью формул (*) и (**):

$$Z(\overline{A_{Б_0}}) = (\overline{C}_Б; \overline{A}_Б) = \sum_{i=1}^{m} a_i \cdot C_i^Б = c_1 a_1 + c_2 a_2 + \ldots + c_m a_m \qquad (*)$$

$$Z_{(\overline{j-c_j})} = (\overline{C}_{Б_0} \cdot \overline{A}_j) - c_j = \sum_{i=1}^{n} c_i^Б \cdot a_{ij} - c_j, \quad j = \overline{1,n} \qquad (**)$$

Критерием оптимальности являются оценки в индексной строке. В ней имеются положительные оценки, следовательно, данный опорный план не является оптимальным (по теореме оптимальности). Наибольшая положительная оценка в индексной строке соответствует вектору $\overline{A_1}$, значит столбец $\overline{A_1}$ - разрешающий столбец. Вводим в базис вектор $\overline{A_1}$. Для определения вектора, выводимого из базиса, вычисляется симплексное отношение:

$$\theta = \min\left\{\frac{2}{1}, \frac{1}{1}\right\} = 1$$

Минимум достигается в строке $\overline{A_4}$, значит эта строка направляющая, поэтому выводим из базиса вектор $\overline{A_4}$. Переходим к табл.2. Вносим соответствующие изменения в столбцы Б и $\overline{C_Б}$. На пересечении разрешающего столбца и направляющей строки стоит разрешающий элемент. В данном случае это 1.

В новой симплексной таблице, записываем направляющую строку, но делим каждый элемент на разрешающий элемент, а в разрешающий столбец записываем базисный вектор. Делаем пересчет остальных строк таблицы по правилу «прямоугольника»:

$a'_{mi} = \dfrac{a_{mi} \cdot a_{lk} - a_{li} \cdot a_{mk}}{a_{lk}}$, где a_{lk} - разрешающий элемент.

Например, в табл.1. разрешающий элемент a_{41}, значит

$$a'_{3Б} = \frac{a_{3Б} \cdot a_{41} - a_{4Б} \cdot a_{31}}{a_{41}} = \frac{1 \cdot 1 - 1 \cdot (-1)}{1} = 2.$$

Для построенной новой симплексной таблицы считаем индексную строку. В ней имеются положительные оценки, следовательно, данный опорный план не является оптимальным.

Переходим к рассмотрению табл.2. Положительная оценка в индексной строке этой таблицы соответствует вектору $\overline{A_2}$. Вводим в базис вектор $\overline{A_2}$.

Симплексное отношение в столбце $\overline{A_2}$ соответствует вектору $\overline{A_5}$, так как имеется единственной положительное число, соответствующее вектору $\overline{A_5}$. Выводим из базиса вектор $\overline{A_5}$.

Пересчитываем симплекс-таблицу и переходим к табл.3. Вносим соответствующие изменения в столбцы Б и $\overline{C_Б}$. Выполняем пересчет остальных строк таблицы по правилу «прямоугольника».

Рассматриваем индексную строку табл.3. Поскольку оценки в индексной строке отрицательные и нулевые, то полученный опорный план является оптимальным, а значение целевой функции является минимальным. Напомним, что вычислять оптимальное значение целевой функции не нужно, т.к. оно находится во второй клетке индексной строки последней симплексной таблицы: $Z_{\min} = -17/2$. Из последней симплексной таблицы выписываем оптимальные значения переменных $X_{opt} = (3/2; 1/2; 2; 0; 0)$. Поскольку исходная задача была преобразована, то необходимо вернуться к ее первоначальному виду. Запишем её ответ: $X_{opt} = (3/2; 1/2; 2; 0)$ $Z_{\max} = 17/2$.

$Z_{\min} = -11;\ X_{opt} = (5/2; 3/2; 0; 0).$

4. Для следующей задачи линейного программирования построить двойственную задачу и, решив одну из них, записать оптимальные решения для обеих задач.

$$Z = 5X_1 - 7X_2 - X_3 \to \max$$

$$\begin{cases} 2X_1 - X_2 - X_3 \le 2 \\ X_1 - 2X_2 + X_3 = 1 \\ X_1 + X_2 + 2X_3 \ge 1 \end{cases} \left| \begin{matrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{matrix} \right.$$

$$X_j \ge 0,\ j = \overline{1,3}$$

Решение. Запишем двойственную задачу:

$$F = 2Y_1 + Y_2 + Y_3 \to \min$$

$$\begin{cases} 2Y_1 + Y_2 + Y_3 \ge 5 \\ -Y_1 - 2Y_2 + Y_3 \ge -7 \\ -Y_1 + Y_2 + 2Y_3 \ge -1 \end{cases}$$

$$Y_1 \ge 0, Y_3 \le 0$$

Приведем исходную задачу к канонической форме с целевой функцией максимум. Это делается для того, чтобы стандартно определить оптимальное решение двойственной задачи.

$$Z = 5X_1 - 7X_2 - X_3 \to \max$$
$$\begin{cases} 2X_1 - X_2 - X_3 + X_4 = 2 \\ X_1 - 2X_2 + X_3 = 1 \\ X_1 + X_2 + 2X_3 - X_5 = 1 \end{cases}$$
$$X_j \ge 0,\ j = \overline{1,5}$$

Задача не имеет исходного опорного плана, поэтому решим ее с помощью симплекс-метода с искусственным базисом.

$$Z' = 5X_1 - 7X_2 - X_3 - MX_6 - MX_7 \to \max$$
$$\begin{cases} 2X_1 - X_2 - X_3 + X_4 = 2 \\ X_1 - 2X_2 + X_3 + X_6 = 1 \\ X_1 + X_2 + 2X_3 - X_5 + X_7 = 1 \end{cases}$$
$$X_j \ge 0,\ j = \overline{1,7}$$

Б	$C_Б$	B	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7
			5	-7	-1	0	0	-M	-M
A_4	0	2	2	-1	-1	1	0	0	0
A_6	-M	1	1	-2	1	0	0	1	0
A_7	-M	1	1	1	2	0	-1	0	1
$Z'_j - c_j$		0	-5	7	1	0	0	0	0
M		-2	-2	1	-3	0	1	0	0
A_4	0	5/2	5/2	-1/2	0	1	-1/2	0	1/2
A_6	-M	1/2	1/2	-5/2	0	0	1/2	1	-1/2
A_3	-1	1/2	1/2	1/2	1	0	-1/2	0	1/2
$Z'_j - c_j$		-1/2	-11/2	13/2	0	0	1/2	0	-1/2
M		-1/2	-1/2	5/2	0	0	-1/2	0	3/2
A_1	5	1	1	-1/5	0	2/5	-1/5	0	1/5
A_6	-M	0	0	-12/5	0	-1/5	3/5	1	-3/5
A_3	-1	0	0	3/5	1	-1/5	-2/5	0	2/5
$Z'_j - c_j$		5	0	27/5	0	11/5	-3/5	0	3/5
M		0	0	12/5	0	1/5	-3/5	0	8/5
A_1	5	1	1	-1	0	1/3	0	1/3	0
A_5	0	0	0	-4	0	-1/3	1	5/3	-1
A_3	-1	0	0	-1	1	-1/3	0	2/3	0
$Z'_j - c_j$		5	0	3	0	2	0	1	0
M		0	0	0	0	0	0	1	1

Получено оптимальное решение исходной задачи $X_{\max} = (1;0;0), Z_{\max} = 5$.

Определим оптимальное значение переменной Y_1. В первом уравнении исходной таблицы базисным вектором является вектор A_4. На пересечении столбца A_4 и индексной строки последней таблицы находится оценка 2. К 2

прибавляем коэффициент при переменной X_4 целевой функции равной 0. Итак, Y_1=2+0=2.

Аналогично определяем оптимальные значения Y_2 и Y_3:

Y_2=1+M+(-M)=1, Y_3=0+M+(-M)=0.

Оптимальное решение двойственной задачи: $Y_{\min} = (2;1;0), F_{\min} = 5$.

Отметим, что при выводе из базиса искусственного вектора на некотором шаге решения соответствующие столбцы необходимо рассчитывать и в последующих таблицах. Это необходимо для того, чтобы можно было определить оптимальные значения двойственных переменных.

5. Имеются три поставщика A_i и четыре потребителя B_j однородной продукции. В следующей таблице заданы объемы запасов, объемы потребления и удельные затраты на перевозку продукции.

A_i \ B_j	70	30	80	60
100	8	2	0	1
80	3	4	2	3
120	1	4	1	2

Построить первоначальное распределение этой задачи указанными методами.

Решение. В начале решения транспортной задачи всегда необходимо проверять тип транспортной задачи, т.е. открытая или закрытая транспортная модель, и, если модель открытая, предварительно сводить ее к закрытой. Для этого определяем объемы запасов поставщиков (100+80+120=300) и объем потребления всех потребителей (70+30+80+60=240). Запасы продукции больше, чем потребности в ней на 300-240=60 единиц. Для того, чтобы преобразовать эту задачу в закрытую, необходимо ввести фиктивного (пятого) потребителя с объемом потребностей 60 единиц. Удельные затраты на перевозку продукции от поставщиков к фиктивному потребителю полагаем равными нулю. В результате получим следующую матрицу закрытой транспортной задачи.

A_i \ B_j	70	30	80	60	60
100	8	2	0	1	0
80	3	4	2	3	0
120	1	4	1	2	0

Построим первоначальное распределение этой задачи каждым из указанных методов.

Метод северо-западного угла. Сущность этого метода заключается в том, что максимально возможная поставка всегда осуществляется в северо-западную клетку таблицы. При построении исходного распределения с помо-

щью данного метода, из оставшихся клеток выбирается левая верхняя клетка (северо-западная). На первом этапе выбирается клетка (1,1). В эту клетку записывается объем поставки $X_{11} = \min\{A_1, B_1\}$. Величины A_1 и B_1 уменьшаются на данную величину. Ту строку или столбец, где будет получен 0, удаляют из рассмотрения. Затем из оставшихся клеток, рассматривают левую верхнюю клетку и поступают аналогично. Продолжая данный процесс, мы заполним клетку (m, n), причем удалим из рассмотрения и строку, и столбец. Если в процессе заполнения клеток придется вычеркнуть и строку, и столбец, то мы получим вырожденное распределение (количество занятых клеток меньше, чем m+n-1). Чтобы этого не произошло, из рассмотрения удаляем что-то одно: или строку, или столбец, а оставшийся столбец или строку считают с нулевой потребностью или запасами.

Вычислим значение целевой функции для исходного распределения:

$Z = 8 \times 70 + 2 \times 30 + 2 \times 80 + 2 \times 60 = 900.$

B_j / A_i	70	30	80	60	60
100	8 70	2 30	0 0	1	0
80	3	4	2 80	3 0	0
120	1	4	1	2 60	0 60

Метод минимального элемента. Метод северо-западного угла при заполнении клеток абсолютно не учитывает удельные затраты на перевозку, поэтому значение целевой функции может быть далеким от оптимального и, возможно, понадобится большее количество шагов для его нахождения. Метод минимального элемента, наоборот, учитывает удельные затраты, поэтому, как правило, значение целевой функции находится ближе к оптимальному решению. Метод минимального элемента отличается от предыдущего метода тем, что из оставшихся клеток выбирается клетка, имеющая наименьшие удельные затраты. При каждой поставке вычеркивается либо строка, либо столбец. В результате получим:

B_j / A_i	70	30	80	60	60
100	8	2	0 80	1	0 20
80	3	4 30	2	3 10	0 40
120	1 70	4	1	2 50	0

Вычислим значение целевой функции при построенном исходном распределении: $Z = 4 \times 30 + 3 \times 10 + 1 \times 70 + 2 \times 50 = 320$. Значение целевой функции при исходном распределении, построенном методом минимального элемента (Z=320) значительно меньше, чем значение целевой функции при исходном распределении, построенном методом северо-западного угла (Z=900).

Метод потенциалов для оценки распределения на оптимальности при решении транспортной задачи

После построения исходного распределения необходимо определить: является ли данное распределение оптимальным, и, если нет, то перейти к другому «лучшему» распределению. Продолжая данный процесс, найдем оптимальное решение транспортной задачи. Для этих целей используется метод потенциалов, который основан на следующей теореме.

Теорема оптимальности распределения транспортной задачи.

Если для некоторого распределения транспортной задачи выполняются условия:

а) $u_i + v_j = c_{ij}$ *- для занятых клеток;*

б) $u_i + v_j \le c_{ij}$ *- для свободных клеток,*

то данное распределение является оптимальным.

Величины u_i называют потенциалами строк, а величины v_j - потенциалами столбцов.

Для нахождения потенциалов строк и столбцов пользуются следующими рассуждениями, исходя из условия а) теоремы оптимальности.

Количество уравнений, исходя из этого условия равняется m+n-1 (по количеству закрепленных клеток матрицы транспортной задачи (ТЗ)), а количество неизвестных u_i и v_j равняется m+n (по количеству ограничений в ТЗ). Таким образом, количество переменных больше количества уравнений, причем, все уравнения линейно независимы. Решение такой системы линейных уравнений является неопределенным, поэтому одному из потенциалов нужно присвоить любое значение. На практике u_i=0. Получается система из m+n-l уравнений с m+n-1 неизвестными переменными. Эту систему можно решить любым методом и получить определенное решение. На практике для расчета потенциалов рассматриваются занятые клетки, для которых один из потенциалов известен, и исходя из условия а) теоремы вычисляются значения остальных неизвестных потенциалов. Результаты расчета приведены в следующей таблице:

B_j / A_i	70	30	80	60	60	
100	8 -6	2 2	0 80	1 2	0 20	$u_1=0$
80	3 -1	4 30	2 -2	3 10	0 40	$u_2=0$
120	1 70	4 -1	1 -2	2 50	0 -1	$u_3=-1$
	$v_1=2$	$v_2=4$	$v_3=0$	$v_4=3$	$v_5=0$	

После расчета потенциалов необходимо вычислить оценки оптимальности для свободных клеток.

Исходя из соотношения б) теоремы можно записать следующую формулу для вычисления оценок свободных клеток: $\delta_{ij} = u_i + v_j - c_{ij}$. Для того, чтобы оценки не перепутать с объемами перевозок, они (оценки) заключаются в кружки и проставляются в таблицу (см. выше).

Оценки оптимальности в свободных клетках матрицы ТЗ представляют собой критерий оптимальности, с помощью которого осуществляется проверка распределения на оптимальность. Если оценки всех свободных клеток меньше или равны нулю, то данное распределение является оптимальным.

В вышеприведенной таблице указаны оценки оптимальности, поставленные в кружках. Необходимо также вычислить значение целевой функции Z и выписать объемы перевозок в виде матрицы, т.е. распределение. Если распределение не является оптимальным, то необходимо осуществить перераспределение поставок.

Для перераспределения осуществляют построение цикла перерасчета. В качестве исходной клетки выбирается клетка с наибольшей положительной оценкой. Эта клетка помечается знаком «+». В нее необходимо записать некоторый объем поставки. Но тогда нарушится баланс по данному столбцу, следовательно, одну из занятых клеток данного столбца необходимо пометить знаком «-», то есть уменьшить объем поставки на такую же величину. Но тогда изменится баланс по данной строке, следовательно, какую-то занятую клетку данной строки необходимо пометить знаком «+». Данный процесс продолжается до тех пор, пока не будет поставлен знак «-» в строке, где находилась исходная клетка. Проставление знаков «+» и «-» осуществляется поочередно в любую сторону по цепочке, начиная с клетки, куда осуществляется перераспределение.

Для любой свободной клетки существует цикл перерасчета и притом единственный.

Для определения объема продукции, перемещаемого по циклу перерасчета, исходят из следующих двух соображений:

а) после преобразования в клетках таблицы не должны получаться отрицательные числа;

б) одна из занятых клеток должна стать свободной.

Для того, чтобы эти условия выполнялись, необходимо выбрать следующий объем перемещаемой продукции: $\theta = \min\left\{X_{ij}\right\}^{-}$, где $\left\{X_{ij}\right\}^{-}$ - объем поставок в клетках цикла перерасчета, помеченных знаком «-». В нашем примере перераспределение будет осуществляться в клетку A_1, B_2 по цепочке, указанной в таблице штрих-пунктиром. В качестве объема перераспределения выбираем $\theta = \min\left\{X_{ij}\right\}^{-}$, $\theta = \min\left\{20; 30\right\} = 20$.

К значениям клеток, помеченных знаком «+», прибавляется θ, а от значений клеток, помеченных знаком «-», вычитается θ. Значение поставок остальных клеток переписывается без изменений. В результате получим следующую таблицу.

Так будет продолжаться до тех пор, пока в незаполненных клетках матрицы транспортной задачи не будут стоять все отрицательные или нулевые элементы.

B_j / A_i	70	30	80	60	60	
100	8 -8	2 20	0 80	1 0	0 -2	$u_1=0$
80	3 -1	4 10	2 0	3 10	0 60	$u_2=2$
120	1 70	4 -1	1 0	2 50	0 -1	$u_3=1$
	$v_1=0$	$v_2=2$	$v_3=0$	$v_4=3$	$v_5=-2$	

Поскольку в последней таблице нет положительных оценок, то данное распределение является оптимальным: $Z_{\min} = 280$.

$$X_{\min} = \begin{pmatrix} 0 & 20 & 80 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 10 \\ 70 & 0 & 0 & 50 \end{pmatrix}$$

Данное распределение является оптимальным, но не единственным, так как имеются в свободных клетках нулевые оценки оптимальности. Так как пятый потребитель является фиктивным, то соответствующий столбец в

оптимальной матрице перевозок можно не записывать. Для нашего примера фиктивный объем перевозок ($X_{25} = 60$), показывает, что 60 единиц продукции останутся невостребованными у второго поставщика.

Примечание 1. Для того, чтобы вычислить значение целевой функции, достаточно воспользоваться формулой: $Z_1 = Z_0 - \theta \times \delta_{ij}$. Для нашего примера $Z_1 = 320 - 2 \times 20 = 280$

Примечание 2. Иногда бывают транспортные задачи с целевой функцией на max. Такие задачи решаются аналогично, за исключением того, что распределение будет оптимальным в том случае, когда оценки всех свободных клеток будут больше или равны нулю.

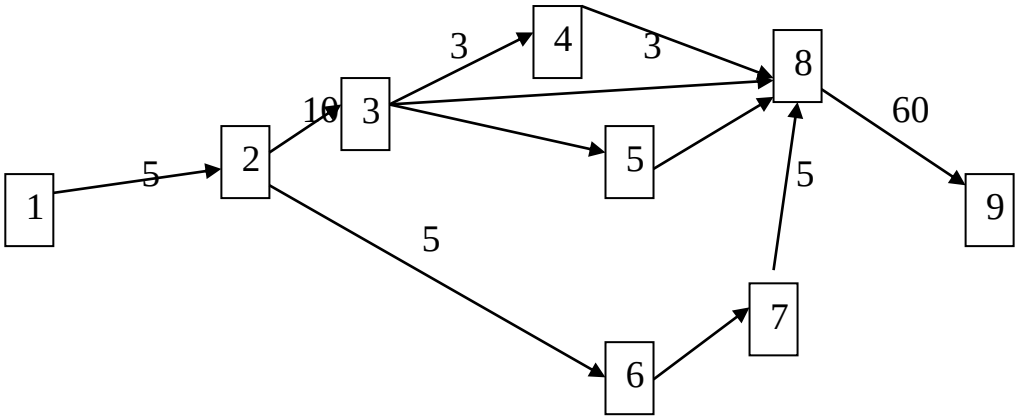
6. Составить сетевой график выполнения работ по реконструкции предприятия и рассчитать временные параметры по данным, представленным в таблице.

(1,2) – определение объема работы.
(2,3) – составление сметы.
(2,6) – выбор проекта реконструкции.
(3,4) – выбор подрядчика.
(3,5) – открытие счета в банке.
(3,8) – утверждение сметы вышест. организации.
(4,8) – составление договора с подрядчиком.
(5,8) – сообщение заказчику об открытии счета в банке.
(6,7) – экономическое обоснование проекта.
(7,8) – привязка проекта к площади предприятия.
(8,9) – работа по реконструкции.

1
9

- исходное событие (0).
- завершающее событие.

операции (работы)	**выполн. функции**	**продолжит. (дни)**
(1,2)	ООР	5
(2,3)	СС	10
(2,6)	ВПР	5
(3,4)	ВП	3
(3,5)	ОСвб	2
(3,8)	УС	5
(4,8)	СД	3
(5,8)	СЗ	1
(6,7)	ЭО	4
(7,8)	ПП	5
(8,9)	РпоР	60



Понятие о пути:

Путь – это любая последовательность работ, в которой конечное событие каждой работы совпадает с начальным событием следующей работы.

Полный путь в с. г. – это непрерывная последовательность соседних работ для кот. начальное событие первой работы является исходным, а конечное событие последующей работы является завершающим.

L1 1, 2, 6, 7, 8, 9.
L2 1, 2, 3, 8, 9.
L3 1, 2, 3, 4, 8, 9.
L4 1, 2, 3, 5, 8, 9.

Длительность пути – это продолжительность выполнения всех входящих в него работ.

t (L1) = t (1,2) + t (2,6) + t (6,7) + t (7,8) + t (8,9) = 5 + 5 + 4 + 5 + 60 = 79
t (L2) = t (1,2) + t (2,3) + t (3,8) + t (8,9) = 5 + 10 + 5 + 60 = 80
t (L3) = t (1,2) + t (2,3) + t (3,4) + t (4,8) + t (8,9) = 5 + 10 + 3 + 3 + 60 = 81
t (L4) = t (1,2) + t (2,3) + t (3,5) + t (5,8) + t (8,9) = 5 + 10 + 2 + 1 + 60 = 78.

Кротчайший путь – это путь, имеющий наименьшую продолжительность t(L4) – 78 – кр. путь.

Критический путь – это путь, имеющий наибольшую продолжительность Lкр.: 1 – 2 – 3 – 4 – 8 – 9. (t (L3)).

Критическое время – продолжительность критического пути tкр.=81 (день).

Работа, стоящая в критич. пути называется ***критическими работами***. Критич. работы 1 – 2 – 3 – 4 – 8 – 9.

События критич. пути называются ***критическими событиями***. Критич. события 1 – 2 – 3 – 4 – 8 – 9.

Расчет временных параметров сетевого графика.

Временные параметры событий:

1). ***Ранний срок свершения события*** – это продолжительность максимального пути, предшествующего ему события, т. е. такой срок свершения события раньше которого событие свершиться не может.

tp (i) = max t (ln(i)), где ln(i) – любой путь, предшествующий i –тому событию, т. е. путь от исходного к i –тому событию.

Если событие имеет несколько предшествующих путей, то ранний срок свершения события находится по формуле:

$$\mathbf{tp\ (j) = \max_{(i,\ j)} (tp\ (i) + t\ (i,\ j))}$$

2). ***Поздний срок свершения события*** – это такой срок позже которого событие свершиться не может.

tn (i) = min (tn (j) - t (i, j))

1)-с исходного события определяем;

2)-с завершающего события.

Пусть «1» - исходное tp(1) = 0

«n» - завершающее tp(n) = tn(n)

3). ***Резерв времени i-го события R(i)*** – это такой срок, который имеет каждое событие для не нарушения графика конечной работы, т. е. показывает на какой допустимый срок (период времени) можно задержать наступление этого события, чтобы не вызвать увеличение срока выполнения всего комплекса работ.

R(i) = tn (i) - tp (i).

Для критических событий резерв времени = 0.

событие	**ранний срок tp (i)**	**поздний срок tn (i)**	**резерв R(i)**

***** помечаем критич. события.

1) tp(1) = 0

tp(2) = 5 = t (1, 2)

tp(3) = tp(2) + t (2,3) = 5 + 10 = 15

tp(4) = tp(3) + t (3,4) = 15 + 3 = 18

tp(5) = tp(3) + t (3,5) = 17

tp(6) = tp(2) + t (2,6) = 5 + 5 = 10

tp(7) = tp(6) + t (6,7) =14

tp(8) = t max tp(3) + t (3,8) 5 + 5

tp(4) + t (4,8) = max 18 + 3 = 21

tp(5) + t (5,8) 17 + 1

tp(7) + t (7,8) 14 + 5

tp(9) = tp(8) + t (8,9) = 21 + 60 = 81

tp(n) = tкр. пути.

2). ***Поздний срок свершения события***.

tn(9) = tp(9) = 81

tn(8) = tn(9) - t (8,9) = 81 – 60 = 21

tn(7) = tn(8) - t (7,8) = 21 – 5 = 16

tn(6) = tn(6) - t (6,7) = 12

tn(5) = tn(5) - t (5,6) = 21 – 1 = 20

tn(4) = tn(8) - t (4,8) = 21 – 3 = 18

tn(3) = min ~~tn(4) - t (3,4)~~ ~~18 – 3~~

tn(8) - t (3,8) = 20 – 2 = 15

tn(5) - t (3,5) 21 – 5

tn(2) = min tn(6) - t (2,6) = 12 – 5 = 5

tn(3) - t (2,3) 15 – 10

tn(1) = 0

3). Резерв времени событий.

R(1) = 0

R(2) = tn(2) - tp(2) = 5 – 5 = 0

R(3) = tn(3) - tp(3) = 15 – 15 = 0

R(4) = tn(4) - tp(4) = 18 – 18 = 0

R(5) = tn(5) - tp(5) = 20 – 17 = 3

R(6) = tn(6) - tp(6) = 12 – 10 = 2

R(7) = tn(7) - tp(7) = 16 – 14 = 2

R(8) = tn(8) - tp(8) = 21 – 21 = 0

R(9) = tn(9) - tp(9) = 81 – 81 = 0

событие	**tp (i)**	**tn (i)**	**R(i)**
1*	0	0	0
2*	5	5	0
3*	15	15	0
4*	18	18	0
5	17	20	3
6	10	12	2
7	14	16	2
8*	21	21	0
9*	81	81	0

***Вывод*:** 1) путь 1, 2, 3, 4, 8, 9 – критический. tкр. = tp(9) = tn(9) = 81 день;

2) события 1, 2, 3, 4, 8, 9 являются критическими, т. к. не имеют резерва времени.

3) события 5, 6, 7 имеют резерв времени 3, 2, 2.

Временные параметры работ:

1. Продолжительность работы (задана на сетевом графике). t (i, j).

2. Ранний срок начала работы tрн **(**i, j) – это такой момент времени начала выполнения работы раньше кот. работа не может начать выполняться из – за того, что еще не свершилось начальное событие.

tрн (i, j) = tр(i)

3. Ранний срок окончания работы tро **(**i, j) – это такой момент времени окончания выполнения работ раньше которого работа не может закончиться из – за того, что начальное событие данной работы еще не свершилось.

tро (i, j) = tр (i) + t (i, j)

4. Поздний срок начала работы tпн – это такой момент времени начала выполнения работы при увеличении кот. увеличивается критическое время (предельный срок начала выполнения работы)

tпн (i, j) = tп (j) - t(i, j)

5. Поздний срок окончания работы tпо **(**i, j) – это такой момент времени завершения выполнения работы, при увеличении которого увеличивается критическое время.

tпо (i, j) = tп (j)

6. Полный резерв времени работы Rп (i, j) показывает насколько можно сдвинуть начало выполнения работы или увеличить ее продолжительность, не изменяя раннего срока начального события.

Rп (i, j) = tп (j) = tро (i, j)

7. Свободный резерв времени работы Rс (i, j) – показывает насколько можно увеличить продолжительность этой работы или отложить начало ее выполнения при условии, что начальное и конечное ее события произойдут в ожидаемый период времени.

Rс (i, j) = tр (j) - tро (i, j)

работы	**t(i, j)**	**tрн (i, j)**	**tро (i, j)**	**tпн (i, j)**	**tпо (i, j)**	**Rп (i, j)**	**Rс (i, j)**
(1,2)							
(2,3)							
(2,6)							
(3,4)							
(3,5)							
(3,8)							
(4,8)							
(5,8)							
(6,7)							
(7,8)							
(8,9)							

Временные параметры пути:

1) продолжительность пути (t (L));
2) продолжительность критического пути (tкр);
3) резерв времени пути (R(L)) – показывает насколько можно увеличить продолжительность работ, состояние их данный путь, без изменения, продолжительности общего срока выполнения работ.

R(L) = tкр - t (L)

Временные параметры работ

работы	t(i, j)	tрн (i, j)	tро (i, j)	tпн (i, j)	tпо (i, j)	Rп (i, j)	Rс (i, j)
(1,2)*	5	0	5	5 – 5 = 0	5	0	5 – 5 = 0
(2,3)*	10	5	15	15–10=5	15	0	15–15=0
(2,6)	5	5	10	12–5 = 7	12	2	10–10=0
(3,4)*	3	15	18	18–3=15	18	0	18–18=0
(3,5)	5	15	20	21–5=16	21	1	21–20=1
(3,8)	2	15	17	20–2=18	20	3	17–17=0
(4,8)*	3	18	21	21–3=18	21	0	21–21=0
(5,8)	1	17	18	21–1=20	21	3	21–18=3
(6,7)	4	10	14	16–4=12	16	2	14–14=0
(7,8)	5	14	19	21–5=16	21	2	21–19=2
(8,9)*	60	21	81	8160=21	81	0	81–81=0

tрн (i, j) = tр(i)
tро (i, j) = tр(i) + t(i, j)
tпн (i, j) = tп (j) - t(i, j)
tпо (i, j) = tп (j)
Rп (i, j) = tп (j) - tро (i, j)
Rс (i, j) = tр(j) - tро (i, j)

Временные параметры пути:

полные пути	t (L)	R(L)
1*-2*-3*-4*-8*-9 L1	81	81 – 81 = 0
1-2-3-6-7-8-9 L2	79	81 – 79 = 2
1-2-3-5-8-9 L3	78	81 – 78 = 3
1-2-3-8-9 L4	80	81 – 80 = 1

R(L) = tкр - t (L)
tкр = 81

7. С помощью метода динамического программирования определить оптимальное распределение капиталовложений, полная выделяемая сумма которой обозначена через k, между четырьмя предприятиями, чтобы общий прирост продукции, выраженный в относительных единицах, был максимальный.

В таблице слева в 1-м вертикальном столбце указаны возможные доли выделения капиталовложений в тыс. грн. В остальных столбцах приведены приросты продукции в относительных единицах $g_i(x)$ по каждому i-ому предприятию (i = 1, 2, 3, 4) в зависимости от вложения средств x.

X, тыс. грн.	$g_1(x)$	$g_2(x)$	$g_3(x)$	$g_4(x)$
60	30	35	55	40
120	75	80	92	100
180	110	130	125	137
240	150	155	180	175

$$1 \to 1и2 \to 3и(1+2) \to 4и(1+2+3)$$

I этап: $Z_1(0) = 0$

$Z_1(60) = 30$

$Z_1(120) = 75$

$Z_1(180) = 110$

$Z_1(240) = 150$

IIэтап: $Z_2(0) = 0$

$$Z_2(60) = \max\left\{\frac{g_1(0)+g_2(60)}{g_1(60)+g_2(0)}\right\} = \max\left\{\begin{matrix}0+35\\30+0\end{matrix}\right\} = 35$$

$$Z_2(120) = \max\left\{\begin{matrix}\underline{g_1(0)+g_2(120)}\\g_1(60)+g_2(60)\\g_1(120)+g_2(0)\end{matrix}\right\} = \max\left\{\begin{matrix}0+80\\30+35\\75+0\end{matrix}\right\} = 80$$

$$Z_2(180) = \max\left\{\begin{matrix}\underline{g_1(0)+g_2(180)}\\g_1(60)+g_2(120)\\g_1(120)+g_2(60)\\g_1(180)+g_2(0)\end{matrix}\right\} = \max\left\{\begin{matrix}0+130\\30+80\\75+35\\110+0\end{matrix}\right\} = 130$$

$$Z_2(240)=\max\begin{Bmatrix} g_1(0)+g_2(240) \\ \underline{g_1(60)+g_2(180)} \\ g_1(120)+g_2(120) \\ g_1(180)+g_2(60) \\ g_1(240)+g_2(0) \end{Bmatrix}=\max\begin{Bmatrix} 0+155 \\ 30+130 \\ 75+80 \\ 110+35 \\ 150+0 \end{Bmatrix}=160$$

III этап: $Z_3(0)=0$

$$Z_3(60)=\max\begin{Bmatrix} g_3(0)+Z_2(60) \\ \underline{g_3(60)+Z_2(0)} \end{Bmatrix}=\max\begin{Bmatrix} 0+35 \\ 55+0 \end{Bmatrix}=55$$

$$Z_3(120)=\max\begin{Bmatrix} g_3(0)+Z_2(120) \\ g_3(60)+Z_2(60) \\ \underline{g_3(120)+Z_2(0)} \end{Bmatrix}=\max\begin{Bmatrix} 0+80 \\ 55+35 \\ 92+0 \end{Bmatrix}=92$$

$$Z_3(180)=\max\begin{Bmatrix} g_3(0)+Z_2(180) \\ \underline{g_3(60)+Z_2(120)} \\ g_3(120)+Z_2(60) \\ g_3(180)+Z_2(0) \end{Bmatrix}=\max\begin{Bmatrix} 0+130 \\ 55+80 \\ 92+35 \\ 125+0 \end{Bmatrix}=135$$

$$Z_3(240)=\max\begin{Bmatrix} g_3(0)+Z_2(240) \\ \underline{g_3(60)+Z_2(180)} \\ g_3(120)+Z_2(120) \\ g_3(180)+Z_2(60) \\ g_3(240)+Z_2(0) \end{Bmatrix}=\max\begin{Bmatrix} 0+160 \\ 55+130 \\ 92+80 \\ 125+35 \\ 180+0 \end{Bmatrix}=185$$

IV этап: $Z_4(0)=0$

$$Z_4(240)=\max\begin{Bmatrix} g_4(0)+Z_3(240) \\ g_4(60)+Z_3(180) \\ \underline{g_4(120)+Z_3(120)} \\ \underline{g_4(180)+Z_3(60)} \\ g_4(240)+Z_3(0) \end{Bmatrix}=\max\begin{Bmatrix} 0+185 \\ 40+135 \\ 100+92 \\ 137+55 \\ 175+0 \end{Bmatrix}=192$$

№ п/п	даем	получ.	даем	получ.
$П_1$	0	0	0	0
$П_2$	0	0	0	0
$П_3$	60	55	120	92
$П_4$	180	137	120	100
всего	240	192	240	192

Ответ: таким образом, для того, чтобы максимальную прибыль 192 тыс. грн возможны два способа капиталовложений:

1) необходимо четвертому предприятию выделить 180 тыс. грн, а третьему – 60 тыс. грн, в то время как первому и второму ничего не выделять;

   или

2) необходимо четвертому предприятию выделить 120 тыс. грн, третьему – 120 тыс. грн, в то время как первому и второму ничего не выделять.