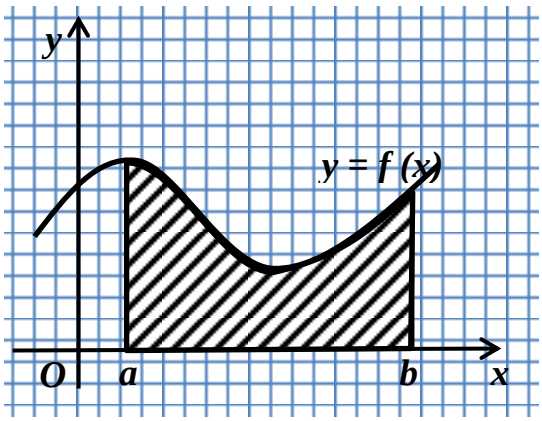
Практическая работа № 15-16

Применение определенных интегралов для вычисления площадей криволинейных трапеций и объемов тел вращения.

Цель работы: научиться вычислять площади криволинейных трапеций и объемы тел вращения.

Содержание работы.

Основные понятия.



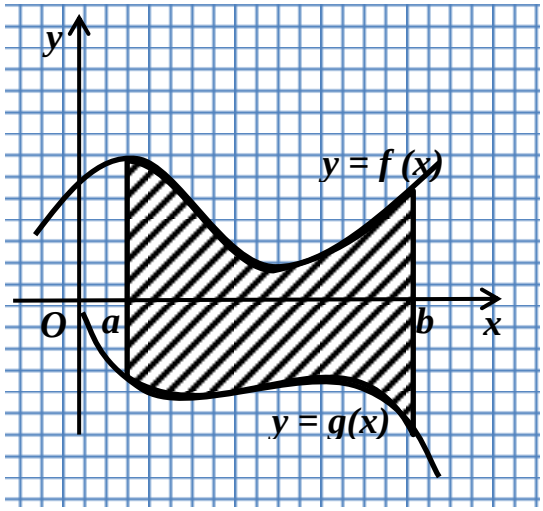
1 Фигура, ограниченная графиком непрерывной,знакопостоянной функции *f(x)*, осью абцисс и прямыми *x=a*, *x=b*, называется криволинейной трапецией.

2 Если *f(x)* непрерывная и неотрицательная функция на отрезке *[a;b]*, то площадь соответствующей криволинейной трапеции равна приращению первообразных. *S = F(b) – F(a)*, где *F(x)* – первообразная *f(x)*.

$$S = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

3 Если криволинейная трапеция расположена под осью Ох и ограничена осью Ох, кривой y=f(x) и двумя прямыми x=a и x=b, то площадь находится по формуле

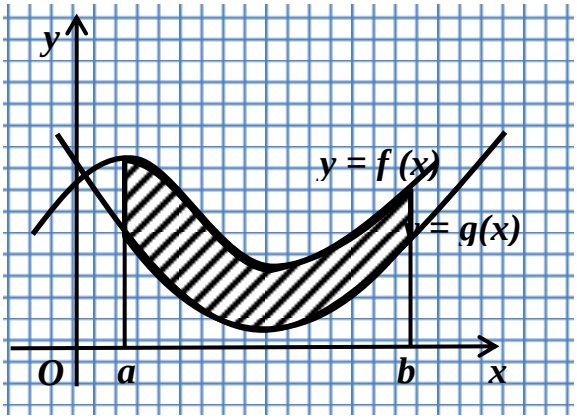
$$S = \left|\int_a^b f(x)dx\right| = |F(b) - F(a)|.$$



4 Фигура расположена над и под осью Ох и ограничена кривыми*y=f(x)*, *y=g(x)* и двумя прямыми *x=a* и *x=b*, тогда

$$S = \left|\int_a^b f(x)dx\right| + \left|\int_a^b g(x)dx\right|.$$

5 Площадь ограничена двумя пересекающимися кривыми *y=f(x)* и *y =g(x)*



(f(x)>g(x)), тогда

$$S=\int_a^b f(x)dx-\int_a^b g(x)dx,$$

где a и b –точки пересечения графиков функций *f(x)* и*g(x)*

6Тело, полученное в результате вращения плоской фигуры, относительно какой-тооси, называют фигурой вращения.

7Если на плоскости Oxy кривую, заданную уравнением*y=f(x),*где $a \le x \le b$, где f(x) непрерывна и неотрицательна вращать вокруг оси x, то

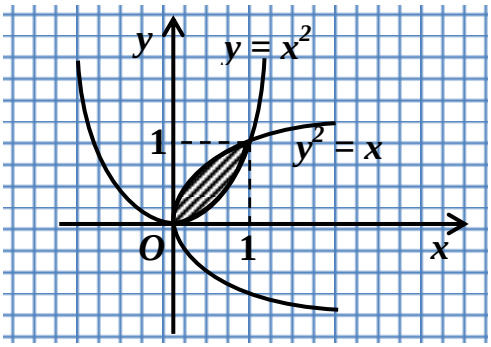
$$V=\pi\int_a^b f^2(x)dx$$

Задание

Исходные данные:

1Найти площадь фигуры, ограниченной линиями: $y=x^2; y^2=x$.

Решение:



а) Найдем точки пересечения графиков заданных функций:

$$\begin{cases} y=x^2 \\ y^2=x \end{cases} \quad \begin{array}{l} x=x^4 \\ x^4-x=0 \end{array} \quad \begin{array}{l} x(x^3-1)=0 \\ x_1=0;\ x_2=1 \end{array}$$

б) ВычислимSфигуры,как разность интегралов функций $y=x^2; y^2=x: y^2=x \Rightarrow y=\pm\sqrt{x}$

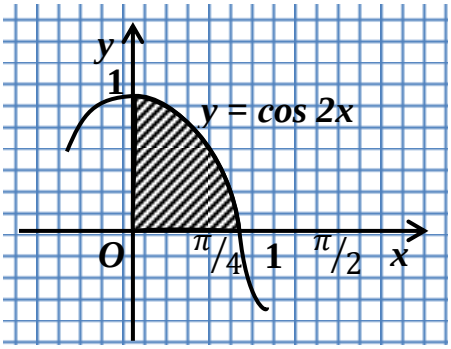
Наша площадь находится выше оси Oy, значит $y=\sqrt{x}$

$$S=\int_0^1\left(\sqrt{x}-x^2\right)dx=\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1=\left(\frac{2x\sqrt{x}-x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1=\frac{2-1}{3}=\frac{1}{3}$$

Ответ: $S=\frac{1}{3}$

2 Найти объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями: $y = \cos 2x;\ y = 0;\ 0 \le x \le \frac{\pi}{4}$ вокруг оси Ох.

Решение:



а) Построим линию $y = \cos 2x;\ 0 \le x \le \frac{\pi}{4}$

б) Вычислим Vфигурыпо формуле:

$$V = \pi\int_0^{\frac{\pi}{4}} f^2(x)dx = \pi\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 2x dx = \pi\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+\cos 4x}{2} dx =$$

$$= \pi\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+\cos 4x}{2} dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} (1+\cos 4x)dx = \frac{\pi}{2}\left(x + \frac{1}{4}\sin 4x\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{2}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{4}\sin\pi - 0\right) = \frac{\pi^2}{8}$$

Ответ: $V = \frac{\pi^2}{8}$

Задания к практической работе.

1 $V-?\ y=e^x;$
$x=0;\ x=1;\ y=0$

2 $y=8+2x-x^2$
$y=x+6$

3 $y=-x^2+5$
$y=x+3$

4 $y^2=4x$
$x^2=4y$

5 $x-2y+4=0$
$3x+2y-12=0\ и\ y=0$

6 $y=2x^2-1$
$y=x^2$

7 $x+y-5=0$
$x-2y+4=0\ и\ y=0$

8 $y=-x^2-1$
$x=1;\ x=4;\ y=0$

9 $y=\frac{1}{x};\ y=x^2$
$1\le x\le e$

10 $y=x^2-6x$
$y=0$

11 $y=x^2+6x+5$
$y=0$

12 $xy=6$
$x+y-7=0$

13 $y=-x^2-4$
$y=0$

14 $y=4x-x^2$
$x=5;\ y=0$

15 $y^2=9x$
$x^2=9y$

16 $y=e^{-x};\ y=e^x;$
$x=0;\ x=1$

17 $y=x^2-4$
$y=x^2$

18 $y=2\sin x;\ y=0$
$x=0;\ x=\frac{\pi}{2}$

19 $y=3\cos x;\ y=0$
$x=-\frac{\pi}{2};\ x=\frac{\pi}{2}$

20 $y=\frac{1}{2}x^3;\ y=0$
$x=0;\ x=4$

21 $y=\sin x;\ y=0$
$x=-\pi;\ x=\pi$

22 $V-?\ y=x^2+1;$
$x=1;\ x=2;\ y=0$

23 $V-?\ y=x^3;$
$x=0;\ x=2;\ y=0$

24 $V-?\ y=4x-x^2;$
$y=0$

25 $y=1+\sin x;\ y=0$
$x=0;\ x=2\pi$

26 $V-?\ y=\frac{4}{x};$
$x=1;\ x=4;\ y=0$

27 $V-?\ y=2x-x^2;$
$y=0$

28 $V-?\ y=\sin x;$
$x=0;\ x=\pi;\ y=0$

29 $y=\frac{1}{x};\ x=1$
$x=3;\ y=0$

30 $y=2\cos x;\ y=0$
$x=-\frac{\pi}{2};\ x=\frac{\pi}{2}$

31 $y=x^2-6x$
$y=0$

32 $y=x^2+6x+5$
$y=0$

33 $xy=6$
$x+y-7=0$

ИНСТРУКЦИОННАЯ КАРТА

для проведения практической работы № 7

Тема занятия: *Применение определенных интегралов для вычисленияп-лощадей криволинейных трапеций и объемов тел вращения*

Цель выполнения задания: *научитьсявычислять площади криволинейных трапеций и объемы тел вращения*

Необходимо знать: *основные формулы и правила интегрирования*

Необходимо уметь: *применять основные формулы и правила интегрирования*

Оборудование (приборы, материалы, дидактическое обеспечение): *методические рекомендации к выполнению работы; задание и инструкционная карта для проведения практического занятия*

Компьютерные программы: *компьютерные программы не используются*

Теория: *Для выполнения заданий по данной теме необходимо предварительно изучить теоретические материалы, а также методические рекомендации к выполнению работы*

Порядок выполнения задания, методические указания: - *ознакомиться с теоретическими положениями по данной теме; - изучить схему решения задач; - выполнить задания практической работы; - сформулировать вывод*

Дополнительные задания: *Могут быть сформулированы по ходу занятия*

Содержание отчета: *отчет по практической работе должен содержать: основные определения, рассуждения по решению задач, необходимые вычисления, ответ; вывод по работе*

Контрольные вопросы: *1 Что такое криволинейная трапеция? 2 Что такое фигура вращения? 3 Как вычислить площадь криволинейной трапеции? 4 Формула площади фигуры, расположенной ниже оси Ох.5Формула площади фигуры, расположенной как выше, так и ниже оси Ох.6Формула площади фигуры, расположенной между графиками двух функций. 7 Формула объемателa вращения.*

Литература:

1 Ю.М.Колягин Математика в 2-х книгах, учебник для СПО, 2008, книга 2

2 И.Л.Соловейчик Сборник задач по математике для техникумов, -М, 2003

3 Н.В. Богомолов Сборник задач по математике, -М, 2006

4 http://works.tarefer.ru

5 http://festival.1september.ru